

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Ferdetengelyű szögtartó hengervetületek a térképészetben

SZAKDOLGOZAT
FÖLDTUDOMÁNYI ALAPSZAK

Készítette:

Fülöp Dávid

térképész és geoinformatikus szakirányú hallgató

Témavezető:

Dr. Györffy János

egyetemi docens

ELTE Térképtudományi és Geoinformatikai Tanszék



Budapest, 2012.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	4
1.1. A szakdolgozat célja és tartalma	4
1.2. A vetületekről általában	5
1.3. A vetületek osztályozása	6
2. A hengervetületek	8
2.1. A gömbi alapfelületű valódi hengervetületek	9
2.2. Az ellipszoidi alapfelületű valódi hengervetületek	11
2.3. A gömbi alapfelületű szögtartó hengervetületek.....	12
2.3.1. A normális (poláris) szögtartó hengervetületek	14
2.3.2. A transzverzális (egyenlítői) szögtartó hengervetületek	14
2.4. Az ellipszoidi alapfelületű szögtartó hengervetületek	15
2.5. A ferdetengelyű (horizontális) szögtartó hengervetületek	16
3. Kettős leképezésű ferdetengelyű szögtartó hengervetületek	20
3.1. A Rosenmund-féle svájci ferdetengelyű szögtartó hengervetület.....	20
3.1.1. A vetület paraméterezése és a vetületi egyenletek	22
3.1.2. A vetület közelítése HOM-vetülettel és EOv-val	25
3.2. A Fasching-féle ferdetengelyű szögtartó hengervetület.....	27
3.3. Az Egységes Országos Vetület (EOV)	30
4. A ferdetengelyű Mercator-vetület.....	37
4.1. Rövid ismertető	37
4.2. A vetület eredete	38
4.3. A vetület tulajdonságai.....	40
4.4. A vetület alkalmazásai	40
4.5. A gömbi vetületi egyenletek	42
4.6. Az ellipszoidi vetületi egyenletek	44
5. A Space Oblique Mercator	52

6. Az EOV közelítése HOM-vetülettel	54
6.1. A vetületek összehasonlítása.....	55
6.2. A HOM-vetület egyenleteinek átírása az EOV alapján	56
6.3. Az EOV koordináták közelítése és a számítás menete	59
6.4. A közelítés eredménye	60
6.5. A közelítés értékelése.....	61
7. Összefoglalás	62
8. Hivatkozások	63
8.1. Irodalomjegyzék.....	63
8.2. Ábrajegyzék	63
8.3. Programjegyzék, és egyéb mellékletek	64
9. Köszönetnyilvánítás.....	67
Nyilatkozat.....	68

1. Bevezetés

1.1. A szakdolgozat célja és tartalma

A szakdolgozatom elsődleges célja az volt, hogy Molnár Gábor és Timár Gábor 2002-ben, a Geodézia és Kartográfia című szaklapban megjelent, Az EOV-koordináták nagy pontosságú közelítése Hotine-féle ferdetengelyű Mercator vetülettel című dolgozatában lévő mérési eredményeket, legfőképpen a közelítés hibáját megvizsgáljam, és saját méréseimmel alátámasszam, illetve összehasonlítsam a két vetületet, az Egységes Országos Vetületet, vagyis az EOV-t, és a ferdetengelyű Mercator-vetületet. Munkájukban a ferdetengelyű Mercator-vetület egyenleteit felhasználva közelítették az EOV koordinátákat nagy pontossággal, illetve felvázolták azt a paraméter-együttest, amellyel az EOV koordináták közelítése során dolgoztak.

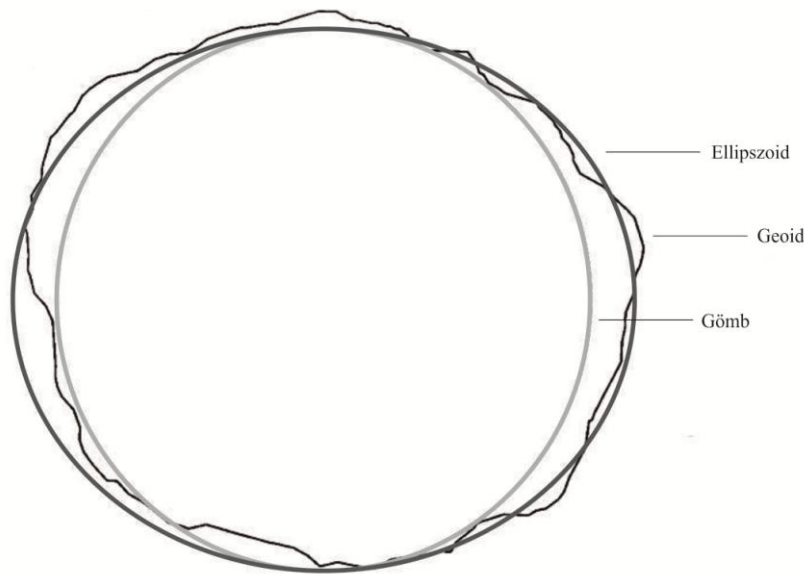
Ezen felül céлом volt az is, hogy a ferdetengelyű szögtartó hengervetületekről egy áttekintést nyújtsak, és megvizsgáljam jelentőségüket és alkalmazásaikat mind hazai, mind külföldi viszonylatban.

A szakdolgozat tartalmát tekintve az elején rövid áttekintést nyújtok a vetülettanról, a vetületekről általában, és a vetületek osztályozási lehetőségeiről, hogy magát a témát egy komplexebb rendszerben el tudjuk helyezni, illetve el tudják helyezni azok, akik kevésbé járatosak e témakörben. Ezután, a szakdolgozatom címének megfelelően, a hengervetületeket, a szögtartó hengervetületeket, és a ferdetengelyű szögtartó hengervetületeket mutatom be részletesebben. A hengervetületeket és a szögtartó hengervetületeket mind gömbi, mind pedig ellipszoidi alapfelületen bemutatom. Ezek után a ferdetengelyű szögtartó hengervetületek konkrét alkalmazásaira térek ki, beleértve a Rosenmund-féle svájci rendszert, a Fasching-féle hazai alkalmazást, és a szintén magyarországi, és máig használt EOV-t, azaz Egységes Országos Vetületet. Aztán nagyobb lélegzetvétellel foglalkozom a ferdetengelyű Mercator és Hotine-féle ferdetengelyű Mercator-vetülettel. Hosszabb taglalását az indokolja, hogy a nemzetközi térképészetben e vetületet alkalmazzák széleskörűen, és a különböző térinformatikai szoftverek is általában ismerik, míg a hazai vetületi rendszereket nem minden esetben. Végül pedig az EOV összehasonlítása és közelítése következik a ferdetengelyű Mercator-vetülettel, majd a közelítés eredménye, és annak értékelése.

1.2. A vetületekről általában

A vetület, mint az a nevében is benne van, egy vetítés, egy leképezés, amely a görbült földfelszín síkra képezi le. A vetületek fontos szerepet játszanak a geodéziai helymeghatározásnál, és a térképi ábrázolásnál egyaránt. A vetület fogalma alatt a geodéziában és a térképészetben általában térképi vetületet értünk. Általánosan megfogalmazva a vetület egy olyan leképezés, ami egy görbült geometriai felület pontjait egy másik geometriai felület pontjainak felelteti meg. Azt a geometriai felületet, amelyről leképezünk, alapfelületnek hívjuk. A másik geometriai felületet, amelyre vetítünk, azt pedig képfelületnek. A leképezés során tehát az alapfelület minden pontjához hozzárendeljük a képfelület egy pontját. Azonban a leképezésnek vannak alapfeltételei, ami nélkül nem lehetséges a vetítés. A matematikai megadásához a vetületnek tehát szükséges, hogy mind az alapfelület, mind pedig a képfelület szabályos legyen, folytonos, és zárt matematikai képletekkel, vagy képlettel leírható legyen.

Ezeknek a kritériumoknak a forgási ellipszoid teljesen megfelel, amely felülettel mostanság közelíteni szokták a Föld felszínét. Meg kell jegyeznünk azonban, hogy a Föld alakja geoid, azaz Föld alakú. A legjobban tehát a geoid közelíti a tényleges földalakat, azonban ez a test nem szabályos, nem írható le zárt matematikai képletekkel. Definíció szerint a geoid a nehézségi erőter azon szintfelülete, amely egybeesik a világóceánok közepes szintjével, és képzeletben a kontinensek alatt is folytatódik. Tehát ezt a geoid alakot közelítjük forgási ellipszoiddal, vagy másnéven szferoiddal. A forgási ellipszoid alatt pedig egy olyan forgásfelület értünk, amely egy ellipszisnek a kistengelye körüli megforgatásából jön létre. Mivel azonban a Földet helyettesítő ellipszoidnak nagyon kicsi a lapultsága, ezért ez a felület egy gömbbel jól közelíthető. Lapultság alatt azt értjük, hogy az ellipszoid felülete a pólusainál kissé összelapított, vagyis lapult. Alapfelületként tehát választhatunk gömböt, vagy forgási ellipszoidot, attól függően, hogy milyen pontossági követelményeknek kell megfelelnünk.



1. ábra. A Föld alakját közelítő felületek

Az alapfelület kiválasztása után jöhet a képfelület, avagy a képfelület milyenségének meghatározása. Mivel általában síkra képezünk le, kivéve a gömbre történő leképezés során a gömbvetületet, ezért a síkra történő vetítés mellett síkba fejthető vetületekre is történhet a leképezés. Ezek a síkba fejthető vetületek általában szabályosak, amelyeket úgy lehet síkba fejteni, hogy egy alkotójuk mentén „felvágjuk” őket, miközben a felületen belüli méretek, méretviszonyok nem változnak meg. Ezek a síkba fejthető felületek a henger és a kúp, amik a szabályossági követelményeknek megfelelően a forgáshenger és a forgáskúp.

1.3. A vetületek osztályozása

Mint ahogy arról az előzőekben szó volt, a vetületek csoportosításának talán legelső szempontja az alapfelület szerinti osztályozás. Eszerint lehet gömbi, vagy forgási ellipszoidi alapfelületről beszélni. Egy következő szempont a vetület perspektivitása, vagyis hogy elő lehet-e állítani a vetületet centrális vetítéssel, avagy sem. Eszerint megkülönböztetünk perspektív, avagy centrális geometriai vetítéssel előállítható vetületeket, és nem perspektív vetületeket. A perspektív vetületek képfelületénél beszélhetünk a sík-, henger-, és kúpvetületről. A nem perspektív vetületeknél kizárólag síkvetületekről beszélhetünk, mivel a képfelület csakis sík lehet.

Egy másik nagy osztályozási szempont a térképi fókálózat jellege szerinti csoportosítás. A vetület így lehet valódi, és képzetes. Valódi vetületeknél a paralelkörök képei koncentrikus körök, körívek, vagy párhuzamos egyenesek. A

meridiánok képei pedig olyan egyenesek, amelyek vagy egy pontba futnak össze, vagy párhuzamosak. Jellemző még, hogy a paralelkörök mindenütt merőlegesen metszik a meridiánok képeit. Képzetes vetületekről pedig akkor beszélünk, ha a fokhálózat nem valódi, vagyis az előzőekben felsorolt jellemzők közül legalább az egyik nem teljesül.

Csoportosíthatunk az alap- és képfelület kölcsönös helyzetét, vagyis elhelyezését szempontjából is. Eszerint megkülönböztetünk normális (poláris), transzverzális (egyenlítői), és ferdetengelyű (horizontális) vetületeket. Aszerint is különbséget tehetünk, hogy az alapfelület milyen módon érintkezik a képfelülettel. Így lehet érintő, lebegő, vagy metsző.

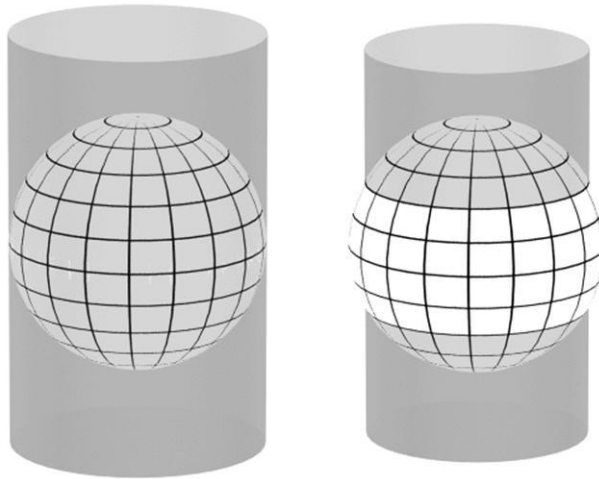
Vetületeinket torzulási szempontból is osztályozhatjuk. A vetület torzulás szempontjából lehet szögtartó (konform), területtartó (ekvivalens), és általános torzulású. Általános torzulású vetületről akkor beszélünk, ha a szögek, a hosszak, és a területek is torzulnak. Kiegészítésként megemlítendő, hogy teljesen hossztartó vetület nincs, csak bizonyos vonalak mentén. Ezek mellett megadhatjuk még a torzulásmentes hely, vagy helyek számát, illetve a maximális torzulás mértékét, és helyét.

2. A hengervetületek

A térképi vetületeknél a képfelület alakja szerint beszélhetünk gömbi és síkvetületekről. Síkvetületek közé soroljuk a síkba fejthető vetületeket is. Így a síkvetületeknél megkülönböztetünk tulajdonképpeni síkvetületet (azimutális vetület), kúpvetületet, és hengervetületet. Az alábbiakban a hengervetületekre térek ki részletesebben.

A hengervetületeknél, idegen szóval cilindrikus vetületeknél megkülönböztetünk valódi, és képzetes vetületeket. A fokhálózat jellege szerinti osztályozás az egyik legkézenfekvőbb osztályozási mód, mivel itt a paralelkörök és a meridiánok térképi megjelenése alapján vizsgálódunk. Akkor beszélünk valódi hengervetületekről, ha fokhálózatára (vagy segédfokhálózatára) igaz, hogy a (segéd-) paralelkörök és (segéd-) meridiánok képei párhuzamos egyenesek, a (segéd-) paralelkörök képei a (segéd-) meridiánok képeit merőlegesen metszik, illetve a (segéd-) meridiánok közti távolság arányos a (segéd-) hosszúságkülönbséggel. Képzetes hengervetületekről pedig akkor beszélünk, ha a (segéd-) paralelkörök képei párhuzamos egyenesekként képződnek le, a (segéd-) meridiánok képei pedig tetszőleges görbe vonalakként jelennek meg. Abban is eltér a valódi hengervetületektől, hogy a (segéd-) paralelkörök és a (segéd-) meridiánok az x és y tengelyen kívül általában nem metszik egymást merőlegesen. Emiatt van az a tulajdonsága a képzetes hengervetületeknek, hogy nincsen közöttük szögtartó, csak területtartó, vagy általános torzulású vetület. Mind a valódi, mind a képzetes hengervetületeknél fennáll, hogy a koordinátarendszer x tengelye az (segéd-) egyenlítő képe, y tengelye pedig az erre merőleges (segéd-) középmeridián képe. Ez tehát a vetületi középpont.

Azonban a hengervetületeket nem csak a fokhálózat képe alapján osztályozhatjuk. A leképezés alapfelülete alapján is megkülönböztethetjük őket, így tehát lehet gömb, vagy forgási ellipszoid. A képfelület elhelyezése szerint, az alapfelülethez képest, lehet normális (poláris), transzverzális (ekvatoriális, egyenlítői), illetve ferdetengelyű (horizontális). A vetület perspektivitása alapján is kategorizálhatunk, így tehát lehet perspektív, és nem perspektív hengervetületekről beszélni. Perspektív hengervetületről akkor beszélünk, ha az centrális geometriai vetítéssel előállítható. Aszerint is megkülönböztethetjük a hengervetületeket, hogy milyen módon érintkezik a képfelület az alapfelülettel. Ilyen módon beszélhetünk érintő, metsző, és lebegő vetületről.



2. ábra. Az érintő, és a metsző hengervetület

Torzulásait tekintve a vetület lehet általános torzulású (a szögek, a hosszak, és a területek is torzulnak), szögtartó (konform), vagy területtartó (ekvivalens). Kiegészítésként tehát megemlítendő, hogy hossztartó vetület nincs, csak bizonyos vonalak mentén. A továbbiakban a valódi hengervetületekre térek ki részletesebben.

2.1. A gömbi alapfelületű valódi hengervetületek

A valódi hengervetületek gömbi alapfelületű változatát a normális elhelyezésű hengervetületből kiindulva paraméterezhetjük a legkönnyebben. Ennél az elhelyezésnél a Föld, vagyis az azt helyettesítő gömb forgástengelye egybeesik a henger forgástengelyével. A henger az Egyenlítő mentén érinti a gömböt, vagyis az alapfelületet, aminek eredményeként az Egyenlítő mentén nem kell számolnunk hossztorzulással, mivel így az hossztartó lesz. Az Egyenlítő egyenesként leképeződő képe a koordináta-rendszer y tengelyét jelöli ki, míg erre merőlegesen lesz a x tengely, melyet úgy kapunk, hogy az Egyenlítő mentén felvesszünk egy pontot, és az ezen a ponton áthaladó meridián képe fogja adni az x tengelyt. A koordináta-rendszer tengelyeinek elnevezése itt fordított, mivel nem matematikai, hanem geodéziai koordináta-rendszert használunk, ahol az x tengely függőleges, míg az y tengely vízszintes. A választott meridián lesz a kezdőmeridián. A koordináta-rendszer kezdőpontja, vagyis origója a két tengely metszéspontjában lesz, tehát ezt a pontot tekintjük a vetületi középpontnak. Ha a hengerpalástot kiterítjük a síkba, akkor az y tengellyel párhuzamosan a parallelkörök képei, míg az x tengellyel párhuzamosan, az y tengelyre merőlegesen a meridiánok képei fognak sorakozni. Mivel a fokhálózati

vonalak párhuzamosak, ezért a paraméterezés során a vetületi egyenletek csak egy-egy koordinátától függenek, amik tehát így a következők:

$$x = x(\varphi)$$

$$y = y(\lambda)$$

Így, hogy a fokhálózatot paramétereztük, megadhatjuk a fokhálózat menti hossztorzulásokat is, pontosabban a h és k értékét. A h a paralelkör menti, míg a k a meridián menti hossztorzulás jelölése. A paralelkör menti hossztorzulás így, levezetéssel együtt a következő:

$$h = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta p'}{\Delta p} = \lim_{\Delta \lambda \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{R \cdot \cos \varphi \cdot \text{arc } \Delta \lambda} = \lim_{\Delta \lambda \rightarrow 0} \frac{R \cdot c \cdot \text{arc } \Delta \lambda}{R \cdot \cos \varphi \cdot \text{arc } \Delta \lambda} = \frac{c}{\cos \varphi}$$

Az egyenletben szereplő Δp a paralelkör menti ívhossz, amely a $\Delta \lambda$ hosszúságkülönbséghez tartozik, $\Delta p'$ pedig a képfelületi ívhosszat jelenti. Az R a gömb sugarát jelöli, míg a c egy konstans. Ezt a c együtthatót a φ_n -ből, vagyis a hossztartó paralelkör segítségével határozzuk meg.

Ha a φ_n hossztartó paralelkörrel szeretnénk számolni, akkor az egyenletben szereplő φ helyébe kell beírunk azt. Az egyenlet tehát így módosul:

$$h = \frac{c}{\cos \varphi_n}$$

Ha az Egyenlítőt választjuk hossztartónak, akkor a φ_n helyére 0 értéket kell beírunk, mivel az Egyenlítő földrajzi szélessége 0° . A h értéke 1, mivel hossztartásról beszélünk. Így tehát az egyenlet:

$$1 = \frac{c}{\cos 0^\circ}$$

Mivel $\cos 0^\circ$ értéke 1, ezért az egyenletet 1-gyel megszorozva a $c = 1$ egyenlőséget kapjuk. Ennek eredményeképp megkapjuk a végső egyenletet, ami pedig:

$$h = \frac{1}{\cos \varphi}$$

Ha a leképezés nem érintő, hanem metsző elhelyezésű, akkor két hossztartó paralelkört kapunk. A hossztartó paralelkörök elnevezése $+\varphi_n$ és $-\varphi_n$. Az egyenlet általánosan a következő formát ölti:

$$1 = \frac{c}{\cos \varphi_n}$$

Ebből az egyenletből kifejezhetjük c -t, aminek az értéke így $c = \cos \varphi_n$. A végső egyenlet pedig így alakul:

$$h = \frac{\cos \varphi_n}{\cos \varphi}$$

A k meridián menti hossztorzulás értékét pedig a következő, levezéssel együtt leírt egyenletből számíthatjuk ki:

$$k = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta m'}{\Delta m} = \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{R \cdot \text{arc } \Delta \varphi} = \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{\frac{dx}{d\varphi} \cdot \text{arc } \Delta \varphi}{R \cdot \text{arc } \Delta \varphi} = \frac{1}{R} \cdot \frac{dx}{d\varphi}$$

A Δm a $\Delta \varphi$ szélességkülönbséghez tartozó meridián menti ívhossz, a $\Delta m'$ pedig ennek képfelületi megfelelője. A koordináta-rendszernek megfelelően ez egy függőleges, azaz x irányú elmozdulás.

2.2. Az ellipszoidi alapfelületű valódi hengervetületek

A valódi hengervetületek ellipszoidi alapfelületű változatánál a paraméterezés során, vagyis a vetületi egyenleteknél a Φ és Λ ellipszoidi földrajzi koordinátákhoz közvetlenül vannak hozzárendelve az x és y síkkoordináták. A vetületi egyenletek így a következők:

$$x = x(\Phi, \Lambda)$$

$$y = y(\Phi, \Lambda)$$

Miután paramétereztük a fokhálózatot, ezután megadhatjuk a fokhálózat menti hossztorzulásokat, pontosabban a h paralelkör menti, és a k meridián menti hossztorzulást. Először adjuk meg a paralelkör menti h hossztorzulást:

$$h = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta p'}{\Delta p} = \lim_{\Delta \Lambda \rightarrow 0} \frac{c \cdot \Delta \Lambda \cdot \sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \Phi}}{a \cdot \cos \Phi \cdot \Delta \Lambda} = \frac{c \cdot \sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \Phi}}{a \cdot \cos \Phi}$$

Az egyenletben szereplő Δp a $\Delta \Lambda$ hosszúságkülönbséghez tartozó ívhossz a Φ szélességű paralellkörön, a $\Delta p'$ pedig a képfelületen lévő ívhosszat jelenti. Az a az ellipszoidi alapfelület fél nagytengelyét jelöli, a c pedig egy konstanst. Ezt a c konstanst a Φ_n hossztartó paralellkörből kaphatjuk meg.

A képletben szereplő Φ helyére a Φ_n hossztartó szélességet kell behelyettesítenünk. A hossztartás miatt h értéke 1 lesz. Így az alábbi összefüggést kapjuk:

$$h(\Phi = \Phi_n) = \frac{c \cdot \sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \Phi_n}}{a \cdot \cos \Phi_n} = 1$$

Ebből a képletből már meg tudjuk határozni a c értékét:

$$c = \frac{a \cdot \cos \Phi_n}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \Phi_n}}$$

Hossztartó szélességi kör esetében tehát így módosul a képlet:

$$h = \frac{a \cdot \cos \Phi_n \cdot \sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \Phi}}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \Phi_n} \cdot a \cdot \cos \Phi} = \frac{\cos \Phi_n \cdot \sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \Phi}}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \Phi_n} \cdot \cos \Phi}$$

A paralellkör menti h hossztorzulás után pedig adjuk meg a k meridián menti hossztorzulást:

$$k = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta m'}{\Delta m} = \lim_{\Delta B \rightarrow 0} \frac{dy}{d\Phi} \cdot \frac{\Delta \Phi \cdot (1 - e^2 \cdot \sin^2 \Phi)^{\frac{3}{2}}}{a \cdot (1 - e^2) \cdot \Delta \Phi} = \frac{dy}{d\Phi} \cdot \frac{(1 - e^2 \cdot \sin^2 \Phi)^{\frac{3}{2}}}{a \cdot (1 - e^2)}$$

A képletben lévő Δm a meridián menti $\Delta \Phi$ szélességkülönbséghez tartozó ívhossz, a $\Delta m'$ pedig a képfelületi ívhossz. A gömb paraméterezésénél használt x és y tengely itt fel van cserélve, vagyis az Egyenlítő egyenesként levetített képe lesz az x tengely, a kezdőmeridián képe pedig az y tengely.

2.3. A gömbi alapfelületű szögtartó hengervetületek

Gömbi alapfelületű hengervetületek esetén akkor beszélünk szögtartásról, ha az alapfelületen mért szögek megegyeznek a képfelületen mért szögekkel. A vetület tehát akkor lesz szögtartó, ha a paralellkör menti hossztorzulás (h) és a meridián menti hossztorzulás (k) egyenlő. Ezt a következő egyenlettel írjuk le:

$$h = k$$

Hengervetületek esetén a következő módon módosul ez az egyenlőség:

$$\frac{\cos \varphi_n}{\cos \varphi} = \frac{1}{R} \cdot \frac{dx}{d\varphi}$$

Ha az egyenletet megoldjuk, akkor megkapjuk az x vetületi egyenletet:

$$x = R \cdot \cos \varphi_n \cdot \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$$

Ezt az egyenletet azonban megadhatjuk egy másik formában is:

$$x = \frac{R}{2} \cdot \cos \varphi_n \cdot \ln \left(\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right)$$

Az y vetületi egyenlet pedig a következő alakot fogja öltetni:

$$y = R \cdot \cos \varphi_n \cdot \operatorname{arc} \lambda$$

Az egyértelműsítés kedvéért meg kell jegyeznünk, hogy a szögtartó hengervetületet normális elhelyezésben paramétereztük, tehát az y tengely az Egyenlítő képének felel meg, míg az x tengely az Egyenlítőre merőleges kezdőmeridián képének felel meg. A képletben szereplő arc arra utal, hogy a szögértéket radiánban kell megadnunk. A direkt vetületi egyenletek után az inverz vetületi egyenleteket a következőképpen definiálhatjuk:

$$\varphi = 2 \cdot \operatorname{arctg} \cdot \exp \left[\left(\frac{x}{R \cdot \cos \varphi_n} \right) \right] - 90^\circ$$

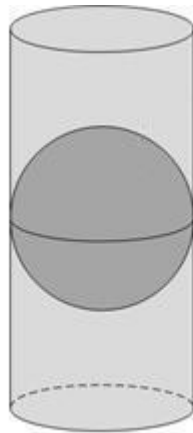
$$\operatorname{arc} \lambda = \frac{y}{R \cdot \cos \varphi_n}$$

A φ értelem szerűen a földrajzi szélesség menti hossztorzulást, míg a λ a földrajzi hosszúság menti hossztorzulást adja meg radiánban mérve.

A szögtartó hengervetületeket elsősorban az Egyenlítő környékének ábrázolására használják. A szögtartó hengervetület egyik legfontosabb tulajdonsága, és egyben a legnagyobb előnye is, hogy a loxodrómák egyenesekre képződnek le. A loxodrómák olyan felületi görbeívek, amelyeknek azimutja (északkal bezárt szöge) állandó a meridiánok képével, vagyis a felületen minden meridiánt azonos szög alatt metszenek. Valódi hengervetületek esetében a loxodrómák képei egyenesekre képződnek le, tehát megállapítható, hogy egy térképi egyenes mindig egy loxodróma képével egyezik meg.

2.3.1. A normális (poláris) szögtartó hengervetületek

A szögtartó hengervetületek egy speciális változata az Egyenlítőben hossztartó, ennek elnevezése normális (poláris) elhelyezésű érintő szögtartó hengervetület. Ennél a vetületnél a képfelületi henger az Egyenlítő mentén érinti az alapfelületet, tehát a képfelület tengelye egybeesik a Föld forgástengelyével.



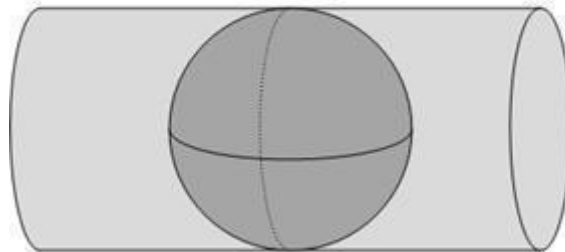
3. ábra. A normális elhelyezésű hengervetület

Ezt Gerardus Mercator (1512-1594), flamand földrajztudós, térképész alkalmazta először 1569-ben világtérképéhez, hajózási célokra. Ezt a normális (poláris) elhelyezésű szögtartó hengervetületet, mint első alkalmazójáról, Mercator-vetületnek nevezték el. Ezt a vetületet kiválóan tudta alkalmazni a hajózás, és a repülés, mivel ha összekötötték egy egyenessel két pontot Mercator-vetületű térképen, akkor a két pont közötti loxodrómáivet kapták meg. Ezt követően tehát sok száz évig a különböző navigációs térképek ebben a vetületben készültek, és a vízi- és légi közlekedés egyik alapját biztosították. Fokhálózati képét tekintve a meridiánok képei egymással párhuzamos, függőleges egyenesekként képződnek le. A paralellkörök képei a meridiánok képeire merőleges, vízszintes egyenesekként jelennek meg. Az egyenlítőtől távolodva két paralellkör közti távolság egyre nő, így a pólus képe nem ábrázolható, mert a végtelenbe tart.

2.3.2. A transzverzális (egyenlítői) szögtartó hengervetületek

A topokartográfiában, vagyis a geodéziai és topográfiai térképezésnél nagy jelentőséggel bír a szögtartó hengervetület transzverzális elhelyezésű változata. Transzverzális érintő elhelyezésnél a képfelületi henger tengelye az Egyenlítő síkjában

fekszik, tehát egy meridián mentén érinti az alapfelületet, tehát a meridián, mint segédegyenlítő torzulásmentes.



4. ábra. A transzverzális elhelyezésű hengervetület

Ettől a segédegyenlítőtől távolodva a torzulások növekednek. Ebben a vetületben a Föld képét gömbkétszögekre lehet felbontani, mely gömbkétszögek középmeridiánját segédegyenlítőnek választva, a Földet ún. vetületi sávokon lehet ábrázolni. Az ilyen vetületeket hívják egyszerűen Transzverzális Mercator-vetületeknek, amely alapját képezi a Föld topográfiai térképezésére használt Gauss-Krüger és UTM (Universe Transverse Mercator) vetületeknek.

2.4. Az ellipszoidi alapfelületű szögtartó hengervetületek

Ellipszoid alapfelületű hengervetületek esetén is akkor beszélünk szögtartásról, mint gömbi alapfelületű esetben, tehát ha az alapfelületen mért szögek megegyeznek a képfelületen mért szögekkel. A szögtartás alapegyenlete tehát itt is fennáll. Az alapegyenlet tehát:

$$h = k$$

Hengervetületek esetében, a megfelelő behelyettesítések után, az egyenlet a következőképpen módosul:

$$\frac{\cos \Phi_n \cdot \sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \Phi}}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \Phi_n} \cdot \cos \Phi} = \frac{dy}{d\Phi} \cdot \frac{(1 - e^2 \cdot \sin^2 \Phi)^{\frac{3}{2}}}{a \cdot (1 - e^2)}$$

Ebből az egyenlőségből aztán kifejezhető az x és y vetületi egyenlet:

$$x = c \cdot \Delta\lambda = \frac{a \cdot \cos \Phi_n \cdot \Delta\lambda}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \Phi_n}}$$

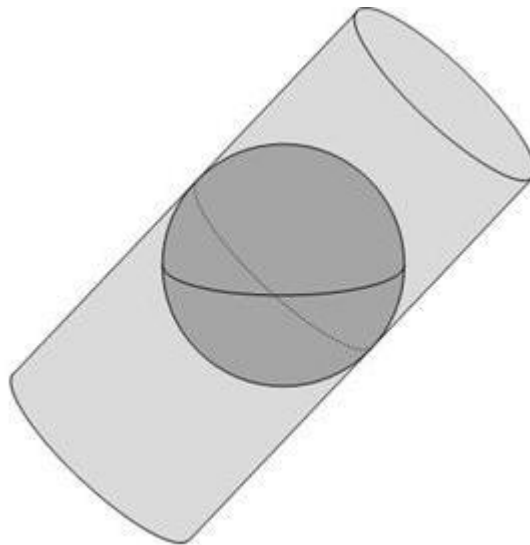
$$y = \frac{\cos \Phi_n \cdot a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \Phi_n}} \cdot \ln \left[\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\Phi}{2} \right) \cdot \left(\frac{1 - e \cdot \sin \Phi}{1 + e \cdot \sin \Phi} \right)^{\frac{e}{2}} \right]$$

Az egyenletben szereplő Φ_n az ellipszoidi normálparalelkört jelenti, azaz a hossztartó szélességi kört. Az a az ellipszoid fél nagytengelye, a c pedig egy konstans. A c értéke, amely megegyezik a hossztartó paralelkör sugarával is, a következő:

$$c = \frac{a \cdot \cos \Phi_n}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \Phi_n}}$$

2.5. A ferdetengelyű (horizontális) szögtartó hengervetületek

Ferdetengelyű elhelyezésről akkor beszélünk a szögtartó hengervetületek esetében, ha a henger nem az Egyenlítő, és nem is meridiánok mentén érinti az alapfelületet, hanem egy ezektől eltérő legnagyobb gömbi kör, egy segédegyenlítő mentén.



5. ábra. A ferdetengelyű hengervetület

Így tehát a ferdetengelyű elhelyezés a normális és a transzverzális elhelyezés mellett egy harmadik lehetősége annak, ahogy a képfelületet elhelyezhetjük az alapfelülethez viszonyítva. A vetületi egyenletek megadásánál a gömbi alapfelületet választjuk, az ellipszoid alapfelülettől most eltekintünk. A ferdetengelyű szögtartó hengervetület definiálásához fel kell vennünk egy segédföldrajzi koordináta-rendszert, amelyre az egyenleteinket vonatkoztathatjuk. A segédpólus koordinátáit jelöljük φ_0 -lal és λ_0 -lal. A

segédföldrajzi szélesség jelölésére a φ^* -ot, a segédföldrajzi hosszúság jelölésére pedig λ^* -ot használjuk. Az egyenletekben itt is nagy jelentőséggel bír a hossztartó szélesség, a φ_n^* normálparalellokör. A segédföldrajzi koordináta-rendszerre vonatkoztatott egyenletek tehát a következők:

$$y = R \cdot \cos(\varphi_n^*) \cdot \text{arc}(\lambda^*)$$

$$x = R \cdot \cos(\varphi_n^*) \cdot \ln \text{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi^*}{2} \right) = \frac{R}{2} \cdot \cos(\varphi_n^*) \cdot \ln \left(\frac{1 + \sin(\varphi^*)}{1 - \sin(\varphi^*)} \right)$$

Ezek után az egyenletekben szereplő φ^* és λ^* értékét határozzuk meg, amelyeket azután beírunk az egyenletek megfelelő helyeire. Az egyenletek tehát:

$$\sin(\varphi^*) = \sin \varphi_0 \cdot \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cdot \cos \varphi \cdot \cos(\lambda_0 - \lambda)$$

$$\begin{aligned} \sin(\lambda^*) &= \frac{\cos \varphi \cdot \sin(\lambda_0 - \lambda)}{\cos(\varphi^*)} \\ &= \frac{\cos \varphi \cdot \sin(\lambda_0 - \lambda)}{\sqrt{1 - (\sin \varphi_0 \cdot \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cdot \cos \varphi \cdot \cos(\lambda_0 - \lambda))^2}} \end{aligned}$$

A λ^* -ot egy másik egyenletből is meghatározhatjuk:

$$\text{tg}(\lambda^*) = \frac{\sin(\lambda_0 - \lambda)}{\text{tg} \varphi \cdot \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0 \cdot \cos(\lambda_0 - \lambda)}$$

Ezen egyenletek felhasználásával az x és y vetületi egyenletek:

$$x = \frac{R}{2} \cdot \cos(\varphi_n^*) \cdot \ln \left(\frac{1 + \cos \varphi_0 \cdot \sin \varphi + \sin \varphi_0 \cdot \cos \varphi \cdot \cos(\lambda_0 - \lambda)}{1 - \cos \varphi_0 \cdot \sin \varphi - \sin \varphi_0 \cdot \cos \varphi \cdot \cos(\lambda_0 - \lambda)} \right)$$

$$y = R \cdot \cos(\varphi_n^*) \cdot \arcsin \left(\frac{\cos \varphi \cdot \sin(\lambda_0 - \lambda)}{\sqrt{1 - (\sin \varphi_0 \cdot \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cdot \cos \varphi \cdot \cos(\lambda_0 - \lambda))^2}} \right)$$

vagy

$$y = R \cdot \cos(\varphi_n^*) \cdot \text{arctg} \left(\frac{\sin(\lambda_0 - \lambda)}{\text{tg} \varphi \cdot \cos \varphi_0 - \cos(\lambda_0 - \lambda) \cdot \sin \varphi_0} \right)$$

A fenti vetületi egyenletekben a segédpólus koordinátaival, azaz a φ_0 -lal és λ_0 -lal határoztuk meg az x és y értékét. Azonban egyszerűbb a definiálás, ha bevezetjük a φ_K -t és λ_K -t. Ezek a koordináták fogják megadni a segédegyenlítő és a kezdő-

segédmeridián metszéspontját. A továbbiakban tehát ezekkel a koordinátákkal fogjuk kifejezni a vetületi egyenleteket, melyeknek a kapcsolata a segédpólus koordinátaival az alábbi:

$$\varphi_K = 90^\circ - \varphi_0$$

$$\lambda_K = 90^\circ - \lambda_0$$

A vetületi egyenletek így tehát a következőképpen módosulnak:

$$x = \frac{R}{2} \cdot \cos(\varphi_n^*) \cdot \ln \left(\frac{1 + \cos \varphi_K \cdot \sin \varphi - \sin \varphi_K \cdot \cos \varphi \cdot \cos(\lambda - \lambda_K)}{1 - \cos \varphi_K \cdot \sin \varphi + \sin \varphi_K \cdot \cos \varphi \cdot \cos(\lambda - \lambda_K)} \right)$$

$$y = R \cdot \cos(\varphi_n^*) \cdot \arcsin \left(\frac{\cos \varphi \cdot \sin(\lambda - \lambda_K)}{\sqrt{1 - (\cos \varphi_K \cdot \sin \varphi - \sin \varphi_K \cdot \cos \varphi \cdot \cos(\lambda - \lambda_K))^2}} \right)$$

vagy

$$y = R \cdot \cos(\varphi_n^*) \cdot \arctg \left(\frac{\sin(\lambda - \lambda_K)}{\operatorname{tg} \varphi \cdot \sin \varphi_K + \cos \varphi_K \cdot \cos(\lambda - \lambda_K)} \right)$$

Az inverz vetületi egyenleteket a φ^* és a λ^* segítségével, azaz segéd földrajzi koordinátákkal határozhatjuk meg. Ezek az egyenletek:

$$\operatorname{arc}(\lambda^*) = \frac{y}{R \cdot \cos(\varphi_n^*)}$$

$$\varphi^* = 2 \cdot \arctg \left[e^{\left(\frac{x}{R \cdot \cos(\varphi_n^*)} \right)} \right] - 90^\circ$$

Ezen egyenletekből tehát a gömbi földrajzi koordináták a következők:

$$\varphi = \arcsin(\cos \varphi_K \cdot \sin(\varphi^*) + \sin \varphi_K \cdot \cos(\varphi^*) \cdot \cos(\lambda^*))$$

$$\lambda - \lambda_K = \left(\frac{\sin(\lambda^*) \cdot \cos(\varphi^*)}{\cos \varphi} \right)$$

Az inverz vetületi egyenletek meghatározásához be kell vezetni t -t és z -t, amelyeket az alábbi módon kapjuk:

$$t = \exp \left(\frac{2 \cdot x}{R \cdot \cos(\varphi_n^*)} \right) = \frac{1 + \cos \varphi_K \cdot \sin \varphi - \sin \varphi_K \cdot \cos \varphi \cdot \cos(\lambda - \lambda_K)}{1 - \cos \varphi_K \cdot \sin \varphi + \sin \varphi_K \cdot \cos \varphi \cdot \cos(\lambda - \lambda_K)}$$

$$z = tg \left(\frac{y}{R \cdot \cos(\varphi_n^*)} \right) = \frac{\sin(\lambda - \lambda_K)}{tg\varphi \cdot \sin \varphi_K + \cos \varphi_K \cdot \cos(\lambda - \lambda_K)}$$

Ezeket az alábbi egyenletekbe kell behelyettesíteni, amelyek megadják a földrajzi szélességet és hosszúságot:

$$\sin(\varphi)_{1,2} = \frac{-(1-t) \cdot \cos \varphi_K}{1+t} \pm \frac{2 \cdot \sin \varphi_K}{1+t} \cdot \sqrt{\frac{t}{z^2+1}}$$

Az egyenletben szerepel egy \pm , melyet úgy kell értelmezni, hogy ha a vetületi kezdőponttól, melyet φ_K és λ_K határoz meg, 90° -nál kisebb gömbi távolságra vannak a λ_K -hoz, mint kezdőmeridiánhoz mért pontok, akkor "+" előjellel kell számolni, ha 90° -nál nagyobb távolságra vannak a pontok, akkor pedig "-" előjellel.

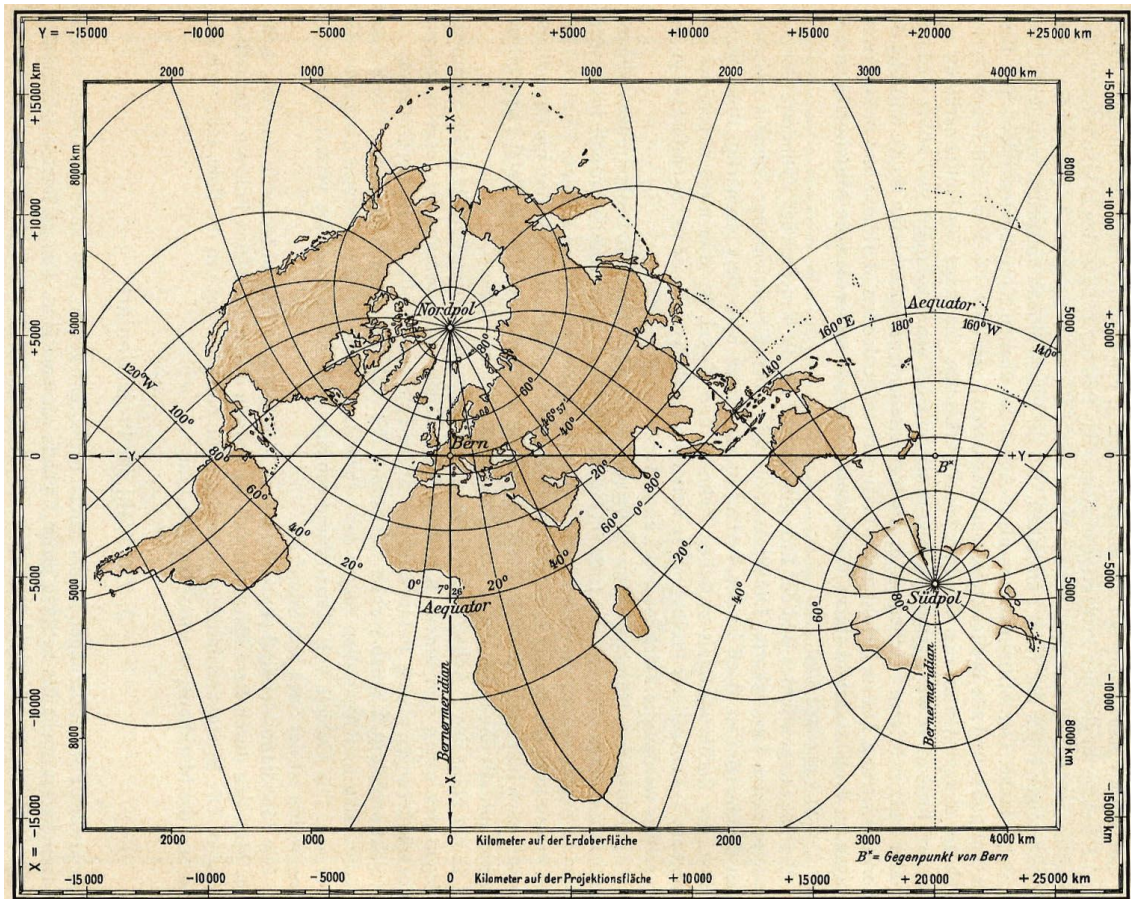
$$\sin(\lambda - \lambda_K) = \frac{2 \cdot z \cdot \sqrt{\frac{t}{1+z^2}}}{\sqrt{(1+t)^2 - \left[(t-1) \cdot \cos \varphi_K + \sin \varphi_K \cdot \sqrt{\frac{t}{1+z^2}} \right]^2}}$$

3. Kettős leképezésű ferdetengelyű szögtartó hengervetületek

3.1. A Rosenmund-féle svájci ferdetengelyű szögtartó hengervetület

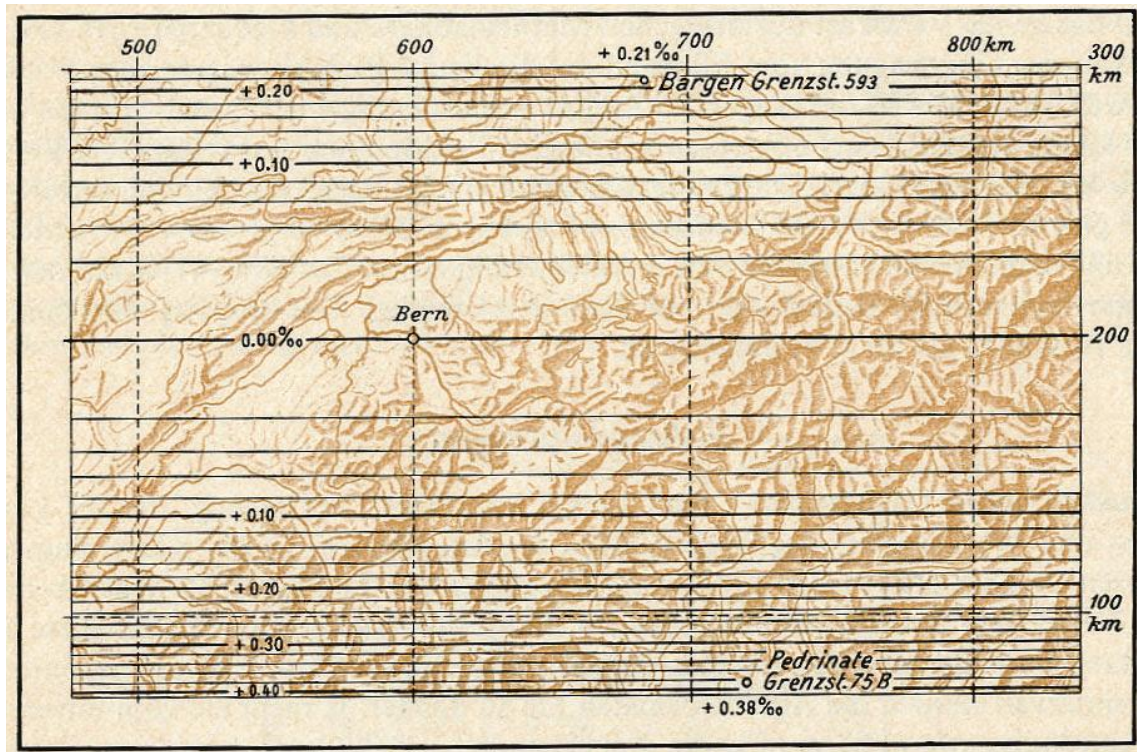
A máig használt svájci vetületi rendszer bevezetése 1883-ra nyúlik vissza, amikor is az országos topográfiai térképezés érdekében a Svájci Geodéziai Bizottság (Schweizerische Geodätische Kommission), élén Scheiblauer mérnökkel elrendelte egy szögtartó hengervetület bevezetését. Scheiblauer maga egy Gauss-féle szögtartó transzverzális hengervetületet javasolt Svájc térképezéséhez, azonban ebben a rendszerben az ország nagy nyugat-keleti kiterjedése miatt a keleti határvidéken túl nagy hossztorzulások léptek fel, és Scheiblauer éppen ez ellen kívánt fellépni az új koordináta-rendszer bevezetésével. Ezzel a megoldással tehát nem volt elégedett Scheiblauer, és elvetette a Gauss-féle rendszert. Összességében tehát egy olyan vetületi rendszert akart, amely az egész ország területére egységesen fennáll, és kielégíti mind az országos topográfiai, mind pedig a kataszteri felmérések igényeit. A századforduló elején azonban ráakadt a vetületi rendszer megoldására, köszönhetően annak, hogy ebben az időszakban sokan foglalkoztak az új országtérképek vetületének tanulmányozásával.

A megoldást M. Rosenmund, az országos topográfiai felmérések mérnöke, a Svájci Szövetségi Műszaki Egyetem későbbi geodéziaprofesszora szolgáltatta. 1903-ban megjelent, „A svájci országos felmérés vetületi rendszerének átalakítása” (Die Änderung des Projektionssystem der schweizerischen Landesvermessung) című publikációjában egy szögtartó kettős leképezésű vetületet javasolt, amelynél első lépésben az ellipszoidról egy közbülső gömbre, majd onnan egy ferdetengelyű hengerre képez. Ebben a rendszerben az érintő gömbi főkört úgy választotta meg, hogy merőleges a Bernen áthaladó meridiánra, és maga a gömbi főkör a berni vetületi középponton halad át. Érdekességként megemlíthető, hogy ezen értekezését Dr. O. Schreiber 1897-es publikációja ihlette.



6. ábra. A berni vetületi középpont egy svájci szerkesztésű világtérképen

A svájci ferdetengelyű szögtartó hengervetület hossz- és területtorzulása kicsi, így tehát megfelel azoknak az elvárásoknak, hogy mind az országos topográfiai felméréseknél, mind pedig a kataszteri felméréseknél használható, így tehát pontos terület-meghatározásra is alkalmazható, ami nagyon fontos az ingatlan-nyilvántartás szempontjából. A koordináta-rendszer tájolását tekintve a berni vetületi középponton áthaladó gömbi főkör képe jelöli ki az *Y*-tengelyt, míg az erre merőleges, szintén a berni vetületi középponton áthaladó meridián képe az *X*-tengelyt. A vetület területtorzulására jobban kitérve Svájc északi pontjában a területtorzulás + 0,021 %, míg a déli pontjában 0,038%, tehát majdnem kétszeres.



7. ábra. A svájci vetület területtorzulása egy svájci szerkesztésű térképen

3.1.1. A vetület paraméterezése és a vetületi egyenletek

M. Rosenmund volt tehát az első, aki az ellipszoid alapfelületű ferdetengelyű szögtartó hengervetületet alkalmazta Svájc topográfiai térképezéséhez. A leképezés alapfelületéül a Bessel ellipszoidot választotta, melynek fél nagytengelye (a) a következő:

$$a = 6\,377\,397,155 \text{ m}$$

Az ellipszoid első numerikus excentricitásának négyzete:

$$e^2 = 0,00667\,43722\,30614$$

A szokásostól eltérő jelölések miatt J. Bolliger alapján felsorolom a svájci rendszerben használatos jelöléseket, és azok jelentését:

B_0 = A berni vetületi középpont ellipszoidi földrajzi szélessége

L_0 = A berni vetületi középpont ellipszoidi földrajzi hosszúsága

B = Egy tetszőleges P pont ellipszoidi földrajzi szélessége

L_G = Egy tetszőleges P pont ellipszoidi földrajzi hosszúsága (Greenwichtól)

$\Phi = B - B_0$ = A szélességkülönbség a B és a B_0 szélesség között

$L = L_G - L_0$ = A hosszúságkülönbség az L_G és az L_0 hosszúság között

$Y_0 = 0$ = A berni vetületi középpont vízszintes síkkoordinátája

$X_0 = 0$ = A berni vetületi középpont függőleges síkkoordinátája

Y = A tetszőleges P pont vízszintes síkkoordinátája (hosszúsága) a berni rendszerben

X = A tetszőleges P pont függőleges síkkoordinátája (szélessége) a berni rendszerben

Ezek után a vetület egyik legfontosabb paramétere, a berni vetületi középpont ellipszoidi koordinátáinak megadása következik. A berni vetületi középpont pontosabban meghatározva a Bernben lévő régi csillagvizsgáló ellipszoidi földrajzi koordinátáit jelenti:

$$B_0 = 46^\circ 57' 8,66''$$

$$L_0 = 7^\circ 26' 22,50''$$

1938-ban azonban újra meghatározták e pontnak a koordinátáit, és ettől kissé eltérő értékek adódtak. A számolásoknál ezeket az új értékeket vesszük figyelembe:

$$B_0 = 46^\circ 57' 7,89''$$

$$L_0 = 7^\circ 26' 22,335''$$

Az ellipszoid és a sík közötti direkt, közvetlen leképezés vetületi egyenleteit M. Rosenmund határozta meg. Ezek az egyenletek logaritmikus számolásokat tartalmaznak. Az képletek értelmezéséhez tehát tudni kell, hogy a szögletes zárójelben ([]) lévő számok tízes alapú logaritmusok, tehát ezeket a számokat, mint kitevőket kell tekinteni tízes alapú hatványokban.

A vetületi egyenletek tehát abban az esetben, ha az Y és X síkkoordinátákból akarjuk meghatározni az L hosszúság-, és a Φ szélességkülönbséget. Fontos megjegyezni, hogy a kiszámolt értékek szögmásodpercben fognak kijönni. Az egyenletek tehát:

$$\begin{aligned}
L = & [8.6748364015 - 10] \cdot Y + [1.89903844 - 10] \cdot Y \cdot X \\
& + [5.1232405 - 20] \cdot Y \cdot X^2 - [4.6461192 - 20] \cdot Y^3 \\
& - [8.406578 - 30] \cdot Y^3 \cdot X + [8.406578 - 30] \cdot Y \cdot X^3 \\
& + [1.98385 - 30] \cdot Y^3 \cdot X^2 + [1.68282 - 30] \cdot Y \cdot X^4 \\
& + [0.98385 - 30] \cdot Y^5 - [5.4783 - 40] \cdot Y^3 \cdot X^3 \\
& + [4.9554 - 40] \cdot Y^5 \cdot X + [4.9554 - 40] \cdot Y \cdot X^5
\end{aligned}$$

A képlet első tagja, vagyis a $[8.6748364015 - 10] \cdot Y$ szorzótényező helyett használhatjuk a $Y \cdot 0.047 + [6.4732032 - 10] \cdot Y$ tagot is.

$$\begin{aligned}
\Phi = & [8.5103638524 - 10] \cdot X - [1.43353589 - 10] \cdot Y^2 \\
& - [9.4063157 - 20] \cdot X^2 - [4.6536395 - 20] \cdot X \cdot Y^2 \\
& - [4.1220774 - 20] \cdot X^3 - [7.878131 - 30] \cdot X^2 \cdot Y^2 \\
& + [7.387885 - 30] \cdot Y^4 + [5.68795 - 30] \cdot X^4 \\
& - [1.16526 - 30] \cdot X^3 \cdot Y^2 + [1.12081 - 30] \cdot X \cdot Y^4 \\
& + [9.91012 - 40] \cdot X^5 + [4.6765 - 40] \cdot X^2 \cdot Y^4 \\
& - [4.4410 - 40] \cdot X^4 \cdot Y^2 - [3.6283 - 40] \cdot Y^6 \\
& - [1.8388 - 40] \cdot X^6
\end{aligned}$$

Az első tagot itt szintén kicserélhetjük a $X \cdot 0.032 + [6.5871358 - 10] \cdot X$ tagra.

Ezen számolás inverz művelete, vagyis mikor a földrajzi hosszúság-, és szélességkülönbségből akarjuk meghatározni a síkkoordinátákat, akkor a következő képleteket kell alkalmaznunk:

$$\begin{aligned}
Y = & [1.3251635985] \cdot L - [6.03900178 - 10] \cdot L \cdot \Phi \\
& - [9.6457436 - 20] \cdot L^3 - [8.4245898 - 20] \cdot L \cdot \Phi^2 \\
& - [4.931411 - 20] \cdot L \cdot \Phi^3 + [4.632633 - 20] \cdot L^3 \cdot \Phi \\
& - [9.49120 - 30] \cdot L^3 \cdot \Phi^2 + [8.29631 - 30] \cdot L^5 \\
& - [7.53787 - 30] \cdot L \cdot \Phi^4 + [4.1438 - 30] \cdot L^3 \cdot \Phi^3 \\
& - [3.9027 - 30] \cdot L \cdot \Phi^5 - [3.6311 - 30] \cdot L^5 \cdot \Phi
\end{aligned}$$

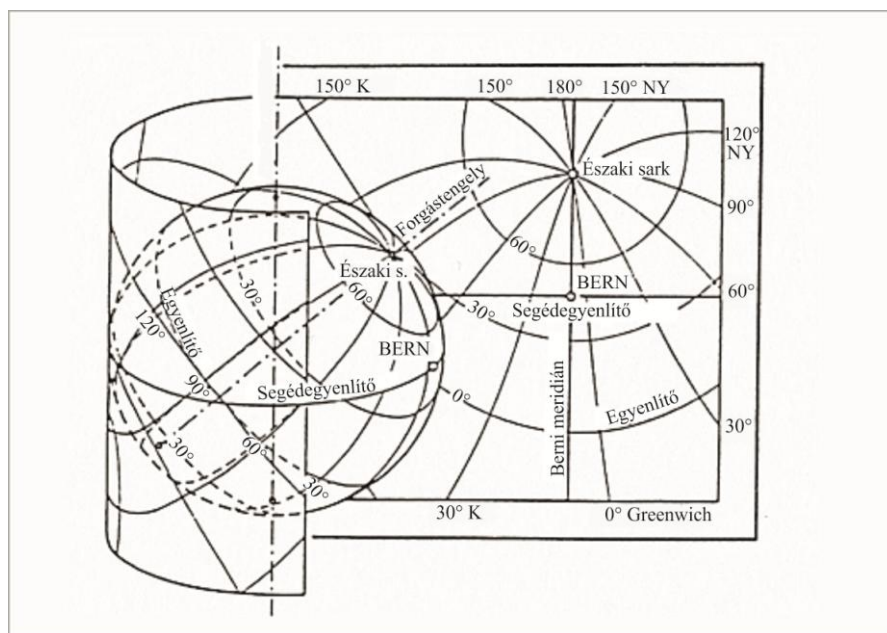
Az első tag helyettesíthető a $L \cdot 21.1 + [8.6319853 - 10] \cdot L$ taggal.

$$\begin{aligned}
X = & [1.4896361476] \cdot \Phi + [5.57349924 - 10] \cdot L^2 \\
& + [3.8752241 - 10] \cdot \Phi^2 - [0.2873374 - 10] \cdot \Phi \cdot L^2 \\
& + [0.0807535 - 10] \cdot \Phi^3 + [4.637576 - 20] \cdot \Phi^2 \cdot L^2 \\
& - [3.866101 - 20] \cdot L^4 + [1.97719 - 20] \cdot \Phi^4 \\
& - [9.57539 - 30] \cdot \Phi^3 \cdot L^2 + [9.15977 - 30] \cdot \Phi \cdot L^4 \\
& + [8.84715 - 30] \cdot \Phi^5 - [4.0734 - 30] \cdot \Phi^2 \cdot L^4 \\
& + [3.6078 - 30] \cdot \Phi^4 \cdot L^2 + [2.6885 - 30] \cdot L^6 \\
& + (0.9980 - 30) \cdot \Phi^6
\end{aligned}$$

Az első szorzótényező helyett használható a $\Phi \cdot 30.8 + [8.8869115 - 10] \cdot \Phi$.

3.1.2. A vetület közelítése HOM-vetülettel és EOJ-val

Mint ahogy az EOJ-t, a Rosenmund-féle svájci ferdetengelyű szögtartó hengervetületet is meg lehet próbálni közelíteni Hotine-féle ferdetengelyű Mercator-vetülettel (HOM). Az EOJ összehasonlítása és közelítése a HOM-vetülettel a későbbiekben fog szerepelni. A közelítést itt szintén az teszi lehetővé, hogy a svájci rendszer igencsak hasonlatos a HOM-vetülethez, mivel mindkét vetület egy ferdetengelyű szögtartó hengervetület. Az összehasonlítás és a közelítés során annyiban is „könnyebb” dolgunk van, mint az EOJ-nél, hogy a svájci rendszer nem redukált (más néven metsző vagy süllyesztett), hanem érintő elhelyezésű, és a normálparalelkörének és a vetületi középpontjának földrajzi szélessége is megegyezik, az EOJ-nél pedig nem.



8. ábra. A svájci ferdetengelyű szögtartó hengervetület

A Hotine-féle ferdetengelyű Mercator-vetület ellipszoidi vetületi egyenleteinek („B” verzió) átírása a svájci rendszer alapján úgy történik, hogy először is a paramétereket kell átírni a svájci rendszernek megfelelően. Az ellipszoid paraméterezésénél a svájci rendszernek megfelelően a Bessel ellipszoidnak a fél nagytengelyét, és az ellipszoidra jellemző első numerikus excentricitását kell megadnunk. Mivel J. Bolliger könyvében az excentricitás négyzete van megadva, ezért a pontosság kedvéért a számolásoknál ezt vesszük figyelembe, és az egyenleteket ennek megfelelően alakítjuk át. A k_0 hossztorzulási együttható értékének 1-et, míg az α_c azimut értékének 90° -ot kell adnunk. A Φ_0 és a Λ_c értékek helyébe pedig a berni vetületi középpont ellipszoidi koordinátáit kell beírni.

A svájci vetületi rendszer koordinátáinak a közelítését, és azok helyességének meghatározását J. Bolliger könyve alapján tudtam elvégezni, mivel két mintapélda szerepelt a könyv hátuljában. Ezekben a mintapéldákban meghatározták egy svájci pont ellipszoidi földrajzi koordinátáit L_G és B jelölést alkalmazva, majd az ehhez tartozó berni vetületi rendszerben lévő síkkoordinátákat méterben, Y és X jelöléssel. A méterben kifejezett pontok helyét a berni vetületi középponttól számítva szögmásodpercben is megadja a könyv L és Φ jelöléssel. Az L_G és a B értékét a könyv fok, perc, szögmásodperc alakban adja meg, de a könnyebb számolás érdekében ezeket fokértékekké alakítottam át. A mintapéldák a következők:

1.példa:

$$Y = +208\,785,59\ m$$

$$X = -76\,522,85\ m$$

$$L = 9746,11494''$$

$$\Phi = -2595,15512''$$

$$L_G = 10,14679167^\circ$$

$$B = 46,23131528^\circ$$

2. példa:

$$Y = +130\,689,06\ m$$

$$X = -83,702,04\ m$$

$$L = 6094,796638''$$

$$\Phi = -2756,620307''$$

$$L_G = 9,1325824^\circ$$

$$B = 46,186677691^\circ$$

A svájci vetületi rendszer koordinátáinak közelítésekor tehát az ellipszoidi földrajzi koordináták segítségével határoztam meg a berni rendszerben lévő, méter mértékegységű pontokat.

A közelítéshez először is Borland Turbo Pascal for Windows 1.5, röviden Turbo Pascal segítségével beprogramoztam az említett Hotine-féle Mercator-vetület képleteit a svájci rendszerre átírva, és így a mintapéldák alapján már egyszerű volt elvégezni a közelítést. Meg kell jegyezni, hogy a programban lévő x és y érték éppen az ellenkezője a berni jelöléseknek, és az eszerinti y koordináta sem negatív előjelű, hanem pozitív a programban. Ezek az eltérések azonban az eltérő koordináta-rendszereknek tudhatók be.

A koordináták összehasonlítása során az adódott, hogy az 1. példa Y értékei abszolút értékben 81,26 cm-rel, míg az X értékei 0,81 cm-rel térnek el egymástól. A 2. példánál az eltérés ennél jóval nagyobb értéket vesz fel, az Y koordináták eltérései 353,12 cm-rel, míg az X értékek 2384,85 cm-rel térnek el. Megállapítható tehát, hogy a svájci vetületi rendszerrel nem beszélhetünk nagy pontosságú közelítésről, így a vetület helyettesítése sem megoldható a mintapéldák alapján Hotine-féle ferdetengelyű Mercator-vetülettel.

A mintapéldában szereplő koordinátákat nem csak a HOM-vetület segítségével próbáltam közelíteni, hanem az EO-val is, vagyis az EO vetületi egyenleteivel, persze a paramétereket megváltoztatva, és az eltolást elhagyva. Azonban a közelítés során az Y értékek közti különbségre nagyságrendileg 1000 m, míg az X értékek köztire 10 000 m jött ki. Ezzel tehát a mintapéldák alapján az adódott, hogy az EO sem alkalmas a svájci rendszer közelítésére. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy két példa igencsak kevés a közelítés elvégzéséhez, és a megfelelő konzekvencia levonásához.

3.2. A Fasching-féle ferdetengelyű szögtartó hengervetület

A ferdetengelyű szögtartó hengervetület érintő elhelyezésű változatát 1908-ban vezették be Magyarországon, vagyis a magyar topokartográfiában. A vetület bevezetése Fasching Antal (1879-1931) földmérő mérnök nevéhez fűződik. Fasching vetületénél a

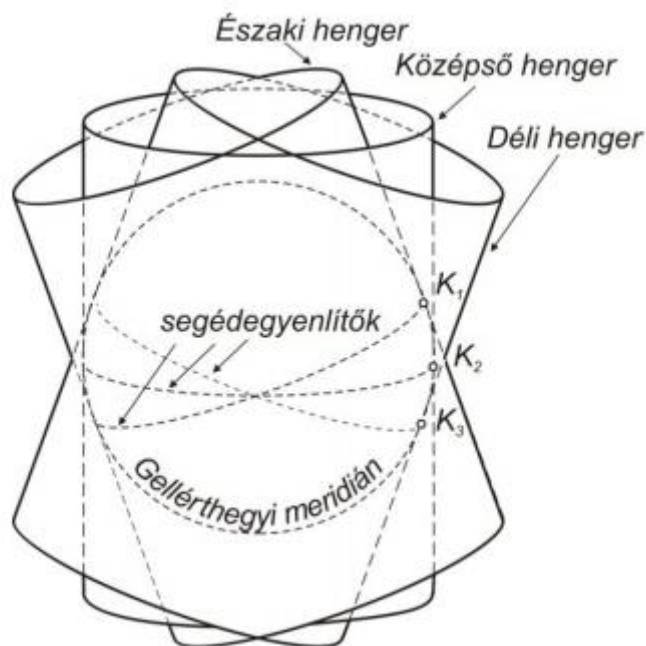
korábban már említett kettős leképezést alkalmazta. Alapfelületül a sztereografikus rendszerből ismert Bessel ellipszoidot ($a = 6\,377\,397,155$ m) választotta. Azonban meg kell említeni, hogy az alapfelület koordinátái a háromszögelési hálózat újratájolása miatt kis mértékben megváltoztak a sztereografikus rendszer koordinátáihoz képest. Az újratájolás következtében így a gellérthegyi meridián iránya, ami az x tengelyt jelöli ki, $6,44''$ -cel eltér nyugatra a sztereografikus rendszerhez képest. Az ellipszoidot ezután, első lépésben, egy közbülső gömbre, az ún. régi magyarországi Gauss-simulógömbre képezte le Gauss-féle szögtartó gömbvetülettel. A régi Gauss-simulógömb sugara a következő:

$$R = 6\,378\,512,966 \text{ m}$$

Utána, második lépésként, ferdetengelyű szögtartó érintő hengervetülettel tért át a Gauss-gömből a síkra. Bevezetésére azért volt szükség, mert az előtte használatban lévő sztereografikus vetület az újonnan előírt pontossági követelményeknek nem felelt meg, vagyis hogy az ország egész területén a hossztorzulás nem haladhatja meg az $1/10000$ értéket. A sztereografikus rendszerrel a kezdőponttól számítva, 127 km-es sugarú körön már elérte ezt a meghatározott küszöbértéket. Mivel ezentúl nem engedték meg az $1/10000$ -nél nagyobb hossztorzulást, ezért egy három hengervetületből álló rendszert vezettek be, amely vetületeknek a vetületi középpontja más, és más. Így létrejött a Henger Északi (HÉR), Henger Középső (HKR), és a Henger Déli (HDR) Rendszer. A vetületi középpontok a gellérthegyi kezdőmeridiánra esnek, azonban mindhárom vetülethez más gömbi földrajzi szélesség tartozik, melyek a következők:

- HÉR: $\varphi_K = 48^\circ 40' 02,000''$
- HKR: $\varphi_K = 47^\circ 06' 00,000''$
- HDR: $\varphi_K = 45^\circ 31' 59,000''$

Az ezeken a pontokon, a gellérthegyi kezdőmeridiánra merőlegesen, áthaladó segédparalelkörök mentesek a hossztorzulástól. Ezekről a paralelköröktől, vagyis a segédegyenlítőktől távolodva észak és dél felé a torzulások értelem szerűen nőnek, tőlük 90 km-es távolságban érik el a kritikus küszöbértéket, vagyis az $1/10000$ -es értéket. Ez a három ferdetengelyű hengervetület tehát az ország akkori területét, tehát a történelmi Magyarország egész területét lefedte, az előbb említett hossztorzulási küszöbérték csupán az akkori északi és déli határ közelében lépett fel.



9. ábra. A három hengervetület (Varga József: Vetülettan)

Érdemes még megemlíteni, hogy a gellérthegyi ponton egyik segédegyenlítő sem halad át, tehát egyik rendszernek sem a kezdőpontja. (Ennek gömbi szélessége $47^{\circ} 26' 21,1372''$.) A vetület DNY-i tájolású volt, vagyis a kezdőmeridián képe, amely az x tengelyt jelölte ki, délre; míg az erre merőleges három segédegyenlítő képe, mely a rendszer y tengelyeit jelölte ki, nyugatra nézett. Ha a gömbi földrajzi koordinátákat szeretnénk derékszögű síkkoordinátákra átszámítani, akkor a vetületi egyenletek a következők:

$$x = -\frac{R}{2} \cdot \ln \left(\frac{1 + \cos \varphi_K \cdot \sin \varphi - \sin \varphi_K \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda}{1 - \cos \varphi_K \cdot \sin \varphi + \sin \varphi_K \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda} \right)$$

$$y = -R \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \lambda}{\operatorname{tg} \varphi \cdot \sin \varphi_K + \cos \varphi_K \cdot \cos \lambda} \right)$$

Amennyiben pedig a síkkoordináták ismeretében a gömbi földrajzi koordinátákat akarjuk kiszámolni, akkor az inverz vetületi egyenletekre van szükségünk, melyek pedig a következők:

$$\varphi = \arcsin \left(\frac{(t-1) \cdot \cos \varphi_K}{1+t} + \frac{2 \cdot \sin \varphi_K}{1+t} \cdot \sqrt{\frac{t}{1+z^2}} \right)$$

$$\lambda = \arcsin \left(\frac{2 \cdot z \cdot \sqrt{\frac{t}{1+z^2}}}{\sqrt{(1+t)^2 - \left[(t-1) \cdot \cos \varphi_K + 2 \cdot \sin \varphi_K \cdot \sqrt{\frac{t}{1+z^2}} \right]^2}} \right)$$

ahol

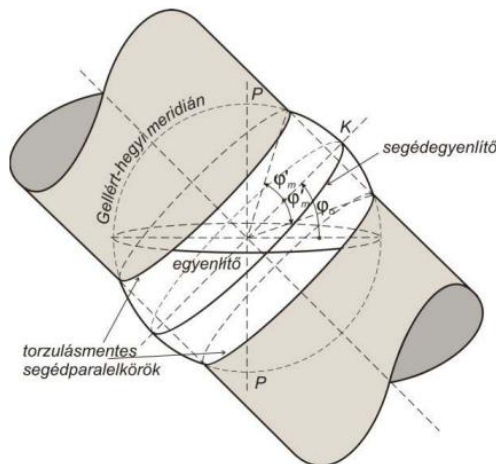
$$t = \exp\left(\frac{-2 \cdot x}{R}\right)$$

$$z = \operatorname{tg}\left(\frac{-y}{R}\right)$$

Fasching rendszerét kataszteri térképek készítéséhez használták. Szelvényezése nem fokhálózati vonalak mentén történt, mint a sztereografikus rendszer esetében, hanem síkkoordináták alapján, így a térképlapok téglalap alakúak voltak.

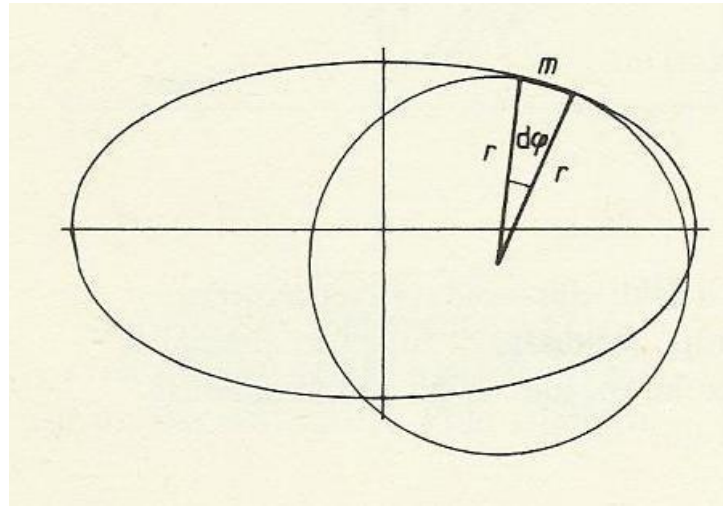
3.3. Az Egységes Országos Vetület (EOV)

Magyarországon 1975-ben új vetületi rendszert vezettek be, melyet Egységes Országos Vetületnek, rövidítve EOV-nak neveztek el. A vetületet polgári célokra hozták létre, tehát kataszteri és topográfiai térképezésre. Az EOV egy ferdetengelyű redukált (más elnevezéssel süllyesztett vagy metsző) szögtartó hengervetület, mely a korábban alkalmazott HKR-nek (Henger Középső Rendszer) egy újításaként is felfogható.



10. ábra. Az EOV, vagyis az Egységes Országos Vetület (Varga József: Vetülettan)

Redukált hengervetületre azért volt szükség, hogy hazánk egészét egy vetületi síkon tudják ábrázolni. Az új vetület kettős leképezést alkalmaz, melynek alapfelületéül az IUGG'67 forgási ellipszoidot ($a = 6\,378\,160$ m) választották, melyet a Nemzetközi Geodéziai és Geofizikai Unió (IUGG) 1967-es kongresszusán fogadtak el, illetve az ezen alapuló HD72 geodéziai dátumot. Első lépésben az ellipszoidot képezték le az új Gauss-simulógömbre a Gauss-féle kis hossztorzulású gömbvetülettel.



11. ábra. Az ellipszoidhoz simuló gömb oldalmetszete (Stegena Lajos: Vetülettan)

Az új Gauss-simulógömb sugara a következő:

$$R = 6\,379\,743,001 \text{ m}$$

Azt a földrajzi szélességet, ahol a Gauss-simulógömb érinti az ellipszoidot, a normálparallelkör szélességének nevezzük. Ennek az értéke gömbre, és ellipszoidra vonatkoztatva:

$$\varphi_n = 47^\circ 07' 20,057 80''$$

$$\Phi_n = 47^\circ 10' 0,000 00''$$

Ezen leképezés gömbi vetületi egyenleteit az alábbi két képletben adhatjuk meg:

$$\varphi = 2 \cdot \arctg \left[\kappa \cdot \operatorname{tg}^n \left(45^\circ + \frac{\Phi}{2} \right) \cdot \left(\frac{1 - e \cdot \sin \Phi}{1 + e \cdot \sin \Phi} \right)^{\frac{n \cdot e}{2}} \right] - 90^\circ$$

$$\lambda = n \cdot \Lambda$$

A gömbi földrajzi koordináták meghatározásához azonban szükség van az n, κ, e paraméterekre, melyeknek az értéke a számolásoknál a következők:

$$n = 1,000\ 719\ 704\ 936$$

$$\kappa = 1,003\ 110\ 007\ 693$$

$$e = 0,081\ 820\ 567\ 940\ 7$$

Az ellipszoidi vetületi egyenletek, vagyis a gömbi vetületi egyenletek inverz képletei pedig a következők:

$$\Phi' = 2 \cdot \arctg^n \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)}{\kappa \cdot \left(\frac{1 - e \cdot \sin \Phi}{1 + e \cdot \sin \Phi}\right)^{\frac{e \cdot n}{2}}} - 90^\circ}$$

Az ellipszoidi szélességet egy iterációs, azaz ismétléses eljárással számíthatjuk ki. Ez azt jelenti, hogy az ellipszoidi földrajzi szélesség pontos értékének kiszámításához mindig a kapott eredményt, azaz a Φ' -t kell behelyettesíteni a Φ helyébe. Az első érték kiszámításához Φ helyébe a φ értékét helyettesítsük. Ennél a képletnél viszonylag alacsony számú, azaz 3-4 iterációval már megfelelő eredményt kapunk. Az ellipszoidi hosszúságot pedig a következő képletből állapíthatjuk meg:

$$\Lambda = \frac{\lambda}{n}$$

Második lépésben pedig a gömböt képezték le a ferdetengelyű redukált szögtartó hengervetülettel a hengerre, mely síkba fejthető. Emiatt a két lépés, két leképezés miatt hívják a vetületet kettős leképezésű vetületnek. A vetület középpontjának a gömbi földrajzi szélessége $\varphi_K = 47^\circ 06' 0,000\ 0''$, mely a gellérthegyi kezdőmeridiánra merőleges. A földrajzi hosszúságot a gellérthegyi kezdőmeridiántól számítjuk, azaz $\lambda_K = 0^\circ 0' 0,000\ 0''$. Ellipszoidon a kezdőpont koordinátái: $\Phi_K = 47^\circ 08' 39,817\ 4''$, és $\Lambda_K = 19^\circ 02' 54,858\ 4''$. Mivel a vetület redukált, ezért a segédegyenlítővel párhuzamosan északra, és délre egy-egy torzulásmentes segédparalelkör helyezkedik el. Ezen két segédparalelkör között a hosszak rövidülnek, tehát a hossz- és területtorzulás kisebb, mint 1; ezeken kívül pedig a hosszak nagyobbodnak, a hossz- és területtorzulás 1-nél nagyobb. A segédparalelkörök torzulása 1, tehát ezek

hossztartóak. Az országban a legnagyobb hossztorzulás hazánk É-i és D-i határa környékén lép fel, azonban ez is csak 0,0001 nagyságrendben tér el a kívánttól. A vetület középpontjának a gellérthegyi felsőrendű háromszögelési ponton áthaladó meridiánt, illetve a kezdőmeridiánra ebben a pontban merőleges főkört (segédegyenlítő) választották. Mind a kezdőmeridián, mind a segédegyenlítő egyenesként képződnek le, mely egyenesek merőlegesek egymásra. Ezen két merőleges egyenes alkotja a térképi síkkoordináta-rendszer alapját, mely ÉK-i tájékozású. Azért ÉK-i, mert a függőleges egyenes északra, míg a vízszintes egyenes keletre néz. A koordináta-rendszer x tengelye a kezdőmeridián egyenesként leképződő képe, míg y tengelye a segédegyenlítő képe. Gyakorlati megfontolások miatt, és hogy elkerüljék a negatív koordinátákból adódó kellemetlenségeket, a koordináta-rendszer kezdőpontját Magyarországon kívül helyezték el DNY-ra. Az x tengelyt így önmagával párhuzamosan 650 000 m-rel nyugatra tolták el, míg az y tengelyt 200 000 m-rel délre. Így tehát egy segéd koordináta-rendszert létesítettek. Az eltolásokat az alábbi két képlet fejezi ki:

$$X = x + X_0$$

$$Y = y + Y_0$$

Az eltolás előtti koordináták az x és az y , az eltolás utániak pedig az X és az Y . Az eltolásnak megfelelően X_0 értéke 200 000 m, míg az Y_0 értéke 650 000 m. A vetületi egyenletekben ezek az eltolások már szerepelnek. A vetületi egyenletekben szerepel még az $m = 0,99993$ redukciós érték, amellyel a maximális hossztorzulás értéke előnyösebb lesz a HKR-nél az ország egész területére vonatkoztatva. Így tehát, ha gömbi földrajzi koordinátákból akarunk síkkoordinátákat kapni, akkor a következő összefüggéseket kell ismernünk:

$$X_{EOV} = \frac{0,99993 \cdot R}{2} \cdot \ln \left(\frac{1 + \sin \varphi \cdot \cos \varphi_K - \cos \varphi \cdot \sin \varphi_K \cdot \cos(\lambda - \lambda_K)}{1 - \sin \varphi \cdot \cos \varphi_K + \cos \varphi \cdot \sin \varphi_K \cdot \cos(\lambda - \lambda_K)} \right) + 200000$$

$$Y_{EOV} = 0,99993 \cdot R \cdot \arctg \left(\frac{\sin(\lambda - \lambda_K)}{\operatorname{tg} \varphi \cdot \sin \varphi_K + \cos \varphi_K \cdot \cos(\lambda - \lambda_K)} \right) + 650000$$

Az eltolás, a negatív koordináták kiszűrésén túl, egy másik nagy előnye, hogy az X koordináták mindig 400 000 m-nél kisebbek, míg az Y koordináták 400 000 m-nél

nagyobbak, így tehát nem lehet őket összetéveszteni. Ezek alapján tehát a koordinátákból közvetlenül meg lehet állapítani, hogy X , avagy Y koordinátáról beszélünk. Az eltolás nélküli síkkoordinátákat az EOY vetületi szabályzata szerint sorfejtéssel is megkaphatjuk közvetlenül a gömbi földrajzi koordinátákból. Ezek az összefüggések:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{R \cdot m}{\varrho} \cdot \varphi + \frac{R \cdot m}{2 \cdot \varrho^2} \cdot \sin \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0 \cdot \lambda^2 + \frac{R \cdot m}{6 \cdot \varrho^3} \cdot \varphi^3 \\
 &\quad - \frac{R \cdot m}{2 \cdot \varrho^3} \cdot \sin^2 \varphi_0 \cdot \varphi \cdot \lambda^2 + \frac{R \cdot m}{4 \cdot \varrho^4} \cdot \sin \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0 \cdot \varphi^2 \cdot \lambda^2 \\
 &\quad - \frac{R \cdot m}{24 \cdot \varrho^4} \cdot \lambda^4 - \frac{5 \cdot R \cdot m}{12 \cdot \varrho^5} \cdot \varphi^3 \cdot \lambda^2 + \frac{R \cdot m}{24 \cdot \varrho^5} \cdot \sin^2 \varphi_0 \\
 &\quad \cdot (1 + 6 \cdot \cos^2 \varphi_0) \cdot \varphi \cdot \lambda^4 + \frac{R \cdot m}{24 \cdot \varrho^5} \cdot \varphi^5 \\
 y &= \frac{R \cdot m}{\varrho} \cdot \cos \varphi_0 \cdot \lambda - \frac{R \cdot m}{\varrho^2} \cdot \sin \varphi_0 \cdot \lambda \cdot \varphi \\
 &\quad - \frac{R \cdot m}{6 \cdot \varrho^3} \cdot \sin^2 \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0 \cdot \lambda^3 - \frac{R \cdot m}{3 \cdot \varrho^4} \cdot \sin \varphi_0 \\
 &\quad \cdot \lambda \cdot \varphi^3 + \frac{R \cdot m}{6 \cdot \varrho^4} \cdot \sin \varphi_0 \cdot \lambda^3 \cdot \varphi \\
 &\quad - \frac{R \cdot m}{2 \cdot \varrho^5} \cdot \sin^2 \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0 \cdot \lambda^3 \cdot \varphi^2 \\
 &\quad + \frac{R \cdot m}{120 \cdot \varrho^5} \cdot \sin^2 \varphi_0 \\
 &\quad \cdot \cos \varphi_0 \cdot (1 + 6 \cdot \cos^2 \varphi_0) \cdot \lambda^5
 \end{aligned}$$

A képletben szereplő ϱ a radián értéke szögmásodpercben kifejezve. Ha ismerjük az EOY eltolt síkkoordinátáit, akkor az inverz vetületi egyenletekkel meghatározhatjuk a gömbi φ és λ értékét az alábbi egyenletekkel:

$$\varphi = \arcsin \left(\frac{(t-1) \cdot \cos \varphi_K}{1+t} + \frac{2 \cdot \sin \varphi_K}{1+t} \cdot \sqrt{\frac{t}{1+z^2}} \right)$$

$$\lambda = \arcsin \left(\frac{2 \cdot z \cdot \sqrt{\frac{t}{1+z^2}}}{\sqrt{(1+t)^2 - \left[(t-1) \cdot \cos \varphi_K + 2 \cdot \sin \varphi_K \cdot \sqrt{\frac{t}{1+z^2}} \right]^2}} \right)$$

ahol

$$t = \exp \left(\frac{2 \cdot (X_{EOV} - 200000)}{0,99993 \cdot R} \right)$$

$$z = \operatorname{tg} \left(\frac{Y_{EOV} - 650000}{0,99993 \cdot R} \right)$$

A gömbi földrajzi koordinátákat segéd földrajzi koordinátákból is meghatározhatjuk, persze csak úgy, hogy előbb a síkkoordinátákból kiszámoljuk a segéd szélességet, és a segéd hosszúságot. A képletek a következők:

$$\varphi^* = 2 \cdot \operatorname{arctg} \left(e^{\frac{x-200000}{0,99993 \cdot R}} \right) - 90^\circ$$

$$\operatorname{arc}(\lambda^*) = \frac{y - 650000}{0,99993 \cdot R}$$

Miután tehát meghatároztuk a segéd koordinátákat, a φ^* és a λ^* értékét, ezután jöhetnek a gömbi földrajzi koordináták:

$$\varphi = \arcsin(\cos \varphi_K \cdot \sin \varphi^* + \sin \varphi_K \cdot \cos \varphi^* \cdot \cos \lambda^*)$$

$$\lambda = \arcsin \left(\frac{\sin \lambda^* \cdot \cos \varphi^*}{\cos \varphi} \right)$$

A segéd koordinátákból nem csak a gömbi koordinátákat határozhatjuk meg, hanem az x és y síkkoordináták értékét is. Az erre vonatkozó képletek:

$$x = R \cdot m \cdot \ln \left[\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi^*}{2} \right) \right]$$

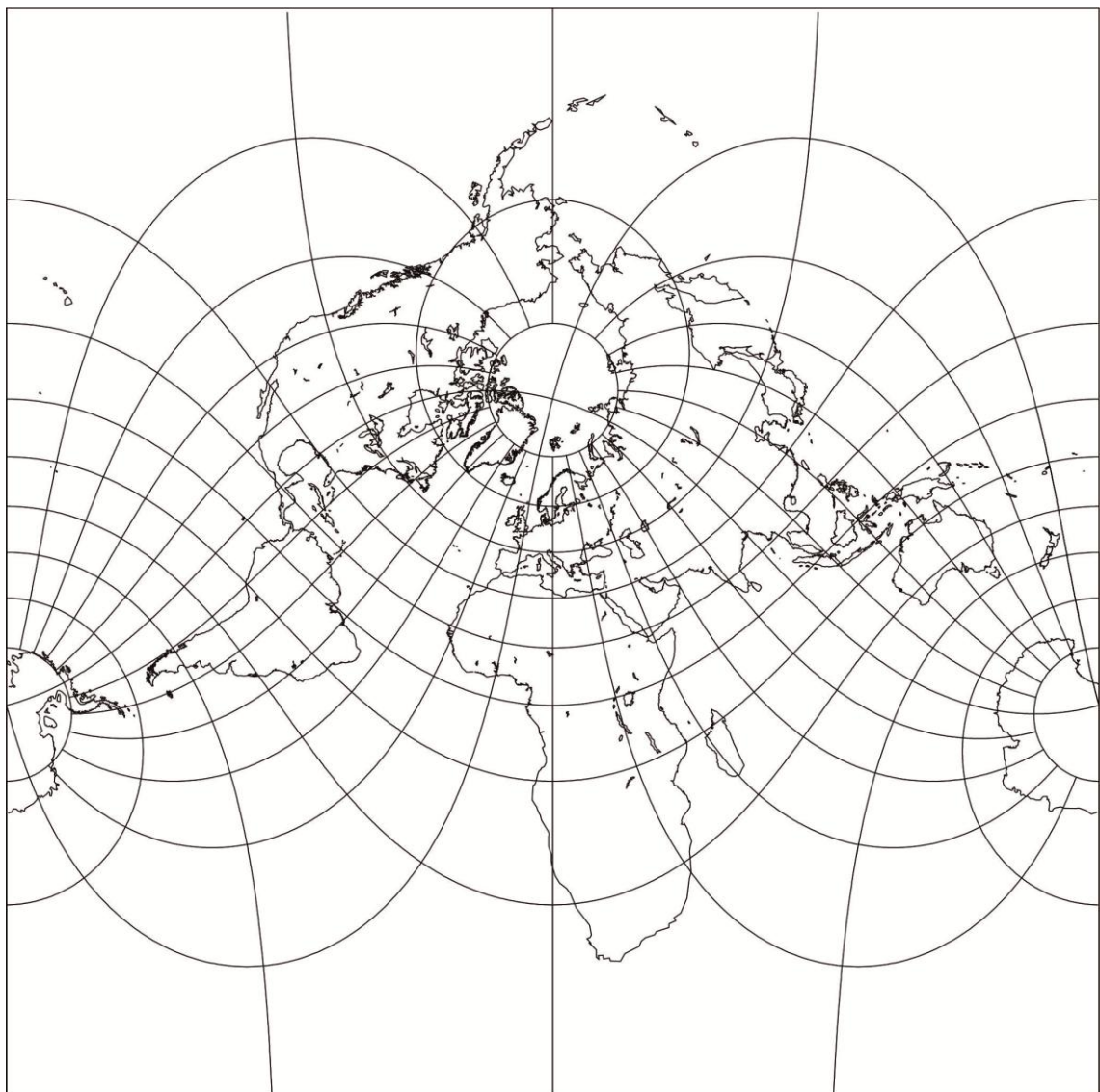
$$y = \frac{R \cdot m}{\varrho} \cdot \lambda^*$$

Az EOVSzelvényezése a vetülethez kialakított rendszerben, az Egységes Országos Térképrendszerben (EOTR) készül, melynek a méretarányosora a következő: 1:100 000, 1:50 000, 1:25 000, 1:10 000, 1:4000, 1:2000, 1:1000.

4. A ferdetengelyű Mercator-vetület

4.1. Rövid ismertető

A ferdetengelyű Mercator-vetület (angolul Oblique Mercator) egy szögtartó hengervetület. A Mercator-vetület elnevezés arra utal, hogy ez egy szögtartó hengervetület. A leképezés szögtartó módon megy végbe. Fokhálózati képére jellemző, hogy két meridiánt kivéve, amelyek egyenesekként képződnek le, a többi gömbi kör, tehát a többi meridián és paralelkör képe görbe vonalakként jelenik meg a képfelületen. A két egyenesként leképződő meridián egymással 180° -os szöget zár be.



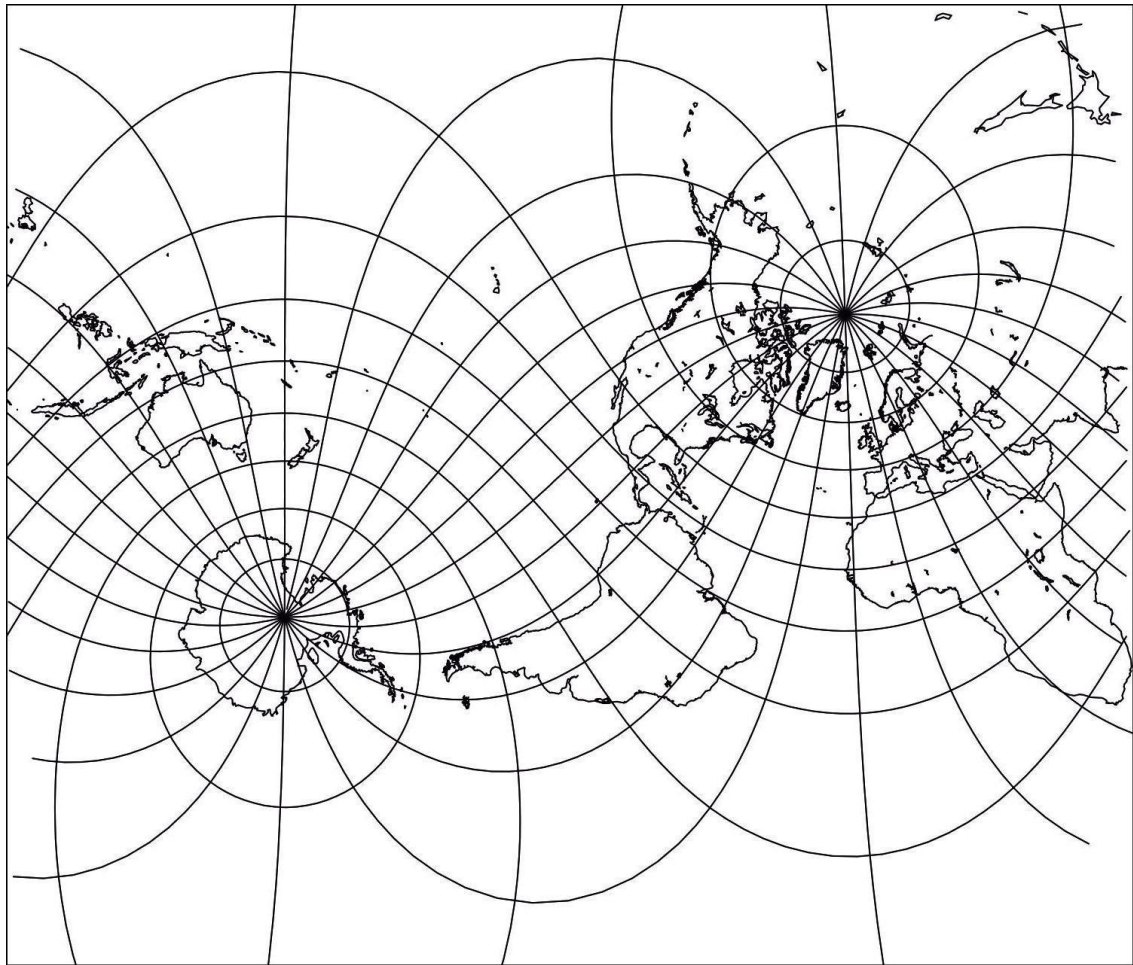
12. ábra. A ferdetengelyű Mercator-vetület fokhálózati képe

A gömbön a középvonal hossztartó. Középvonalnak azt a gömbi főkört hívjuk, ahol a henger a gömböt érinti. A gömbi főkörtől számítva 15° -on belül a gömbi hosszak, irányok, területek és formák meglehetősen pontosak. Redukált, azaz metsző vagy süllyesztett elhelyezésben a középvonallal párhuzamosan két gömbi kör is lehet hossztartó. Az ellipszoidon a hossztartás hasonlóan alakul, bár ettől kissé eltér. A hossztorzulás a központi vonaltól 90° -ra a végtelenbe tart. Főleg Alaszka, Svájc, Madagaszkár, és Borneó térképezésénél használják, illetve azoknál az atlasztérképeknél, ahol nagy kiterjedésű területeket kell ábrázolni ferdetengelyű elhelyezésben. A vetület kifejlesztése 1900 és 1950 közé tehető, és leginkább Laborde, és Hotine nevéhez köthető.

4.2. A vetület eredete

A ferdetengelyű Mercator-vetület eredetét nem ismerjük teljesen, bár azt tudjuk, hogy ez a normális és transzverzális elhelyezésű Mercator-vetületnek egy általános alakja. Azonban az tudható, hogy Rosenmund volt a legelső, mégpedig 1903-ban, aki egy ellipszoidi alapfelületű ferdetengelyű Mercator-vetületet alkalmazott Svájc topográfiai térképezésénél. Ez Rosenmund publikációjában jelent meg, azonban érdemes megemlíteni, hogy a kor egyik legfontosabb enciklopédiájában, az Encyclopaedia Britannica 1911-es számában nem említették meg a térképvetületeknél. Rosenmund után Laborde-ot kell megemlíteni, aki az ellipszoidi ferdetengelyű Mercator-vetületet Madagaszkár topográfiai térképezéséhez használta 1928-ban. 1940-ben és '41-ben Hinks volt az, aki ferdetengelyű Mercator-vetületben hét világtérképet mutatott be úgy, hogy a pólusok mind a hét térképén más, és más elhelyezésben voltak. Erre azért volt szükség, mert így mindegyik térképen más, és más területek voltak kielégítően ábrázolva.

A vetület széleskörű elterjedése azonban egy brit geodéta, Martin Hotine (1898-1968) nevéhez fűződik. 1946-47-ben egy tanulmányt publikált, melyben az ellipszoidi szögtartó vetületekről értekezett. Ebben a tanulmányban a ferdetengelyű Mercator-vetület Egyesült Államokbeli használatára hívta fel a figyelmet. Hotine a vetületet „rectified skew orthomorphic”-nak nevezte el, amit magyarul „helyesbített ferdetengelyű szögtartó” vetületnek fordíthatunk.



13. ábra. A Hotine-féle ferdetengelyű Mercator-vetület fokhálózati képe

Érdemes megemlíteni a ferdetengelyű Mercator-vetület egy újabb változatát is, az űrbéli ferdetengelyű Mercator-vetületet (angolul SOM, azaz Space Oblique Mercator), melyet a műholdképek felhasználásával alkottak meg.

A leképezéseket vizsgálva megállapíthatjuk, hogy számos különböző módszert használtak a vetületnél a leképezés során. Hotine úgy alkotta meg vetületét, hogy az ellipszoidot szögtartóan képezte le egy közbülső gömbre, ami a Gauss-gömbnek felel meg a szakirodalomban, majd azután egy síkra vetítette azt. Hotine ezt a közbülső gömböt „aposphere” néven említi leírásaiban. Eközben, közel egy időben J. H. Cole egy szögtartó gömbre képezte le az ellipszoidot úgy, hogy a szögtartó szélességeket használta fel ahhoz, hogy a gömb az ellipszoidhoz képest szögtartó legyen. Majd erről a szögtartó közbülső gömbről vetített a síkra. Rosenmund leképezése Svájcban ezeknél egy jóval összetettebb kettős leképezés volt, melyet egy szögtartó gömbön keresztül ért el. Itt meg kell említeni tehát, hogy Rosenmund volt az első, aki az ún. „kettős leképezés” módszerét alkalmazta, melyre Hotine, és a többiek rendszere is

támaszkodott. A kettős leképezésnek a magyar vetületi rendszereknél is nagy jelentősége van.

4.3. A vetület tulajdonságai

A gömbi ferdetengelyű Mercator-vetület annyiban tér el a normális és transzverzális változattól, hogy a képfelületi henger nem az Egyenlítő, és nem is a meridiánok mentén érinti a felszínt, hanem egy ezektől eltérő elhelyezésben, egy gömbi főkör mentén, ami a vetület középvonalát (angolul central line) fogja kijelölni. Ilyen elhelyezésben egy segédkoordináta-rendszer alakul ki. A segédmeridiánok és a segédparallelkörök elhelyezkedése a középvonalhoz képest ugyanabban a helyzetben vannak ferdetengelyű elhelyezésben, mint a valódi meridiánok és parallelkörök elhelyezkedése az Egyenlítőhöz képest normális elhelyezésben. Ezen tulajdonság miatt lehet használni a normális elhelyezésű Mercator-vetület egyenleteit ferdetengelyű elhelyezésnél azzal a megkötéssel, hogy a valódi földrajzi értékek helyébe a segéd földrajzi értékeket kell beírni. Ez a módszer gömbre van vonatkoztatva, az ellipszoidra sokkal bonyolultabb az eljárás. Azonban a mai számítógépek megjelenése ezeket a számításokat elvégzik helyettünk gömbre és ellipszoidra.

Az így létrejövő ferdetengelyű Mercator-vetületű világtérkép hasonlít a normális elhelyezésű változatára. A különbség csak annyi, hogy a kontinensek, a normális elhelyezésű világtérképhez viszonyítva, el vannak forgatva. A pólusok és az Egyenlítő méretei változatlanok. Azonban az a két pont, amelyek 90° -ra vannak a középvonaltól, a végtelenbe tart, tehát nem ábrázolhatóak a térképen. A vetületet akkor használjuk, amikor a középvonal menti területeket szeretnénk ábrázolni, vagy egy rövid szakaszt a középvonalon.

4.4. A vetület alkalmazásai

A ferdetengelyű Mercator-vetületet gömbi formában csak néhány atlasztérképhez használják. Példának okáért, a National Geographic Society ezt a vetületet alkalmazza atlaszaihoz, Hawaii térképszelvényeire, Nyugat-Indiához és Új-Zélandhoz. A gömbi vetületet még a USGS (United States Geological Survey) használja Észak- és Dél-Amerika térképeire, valamint Ausztrália egy 1:10 000 000 méretarányú geológiai térképéhez. Észak-Amerikánál a központi hossztorzulási együttható, vagyis a lineármódulus értéke 0,968, a segédpólus helye északi szélesség 10° , és keleti

hosszúság 10° . Dél-Amerikánál ezek az értékek $0,974$, északi szélesség 10° , keleti hosszúság 30° . Ausztráláziánál pedig $0,978$, északi szélesség 55° , nyugati hosszúság 160° . Ezeket az értékeket úgy határozták meg, hogy legkisebb négyzetek módszerével kontinensenként több, mint 100 pontot határoztak meg, amelyekből az optimális paramétereket határozták meg egy közös szögtartó vetületre.

A vetületet ellipszoidi formában, mint arról már szó volt, Rosenmund használta Svájc, és Laborde Madagaszkár térképezésére. Hotine a Maláj-félszigetnél és Borneónál, Cole pedig Olaszországnál használta a vetületet. A híres alaszki földnyelvet, amelyet az amerikaiak „serpenyőnyél” néven emlegetnek, a ferdetengelyű Mercator-vetület Hotine-féle változatában szokta ábrázolni a USGS. Az Egyesült Államok és Kanada határán lévő Nagy Tavak térképezésére a U. S. Lake Survey szintén a Hotine-féle vetületet alkalmazza.

Az űrbéli Mercator-vetületet (SOM), mely a „hagyományos” ferdetengelyű Mercator-vetület egy újabb formába öntése, használják a Landsat típusú adatok megjelenítésére újabban. Azonban a SOM matematikai megvalósításáig a Hotine-féle ferdetengelyű Mercator-vetület (angolul HOM, azaz Hotine Oblique Mercator) volt erre a legalkalmasabb. Ezek mellett, 1978-tól a HOM vetületet alkalmazzák Észak-Amerikában az ún. Hőkapacitási Térképezési Program (Heat Capacity Mapping Mission) képeinek megjelenítésére. A NOAA (National Oceanic and Atmospheric Administration) is a HOM-vetületet alkalmazza arra, hogy az időjárási műholdképeit megjelenítse.

Ha kiválasztunk egy adott térképet, persze HOM-vetületben, akkor annak alapján számos különböző módon paraméterezhetjük a ferdetengelyű Mercator-vetületet. Ha egy kisebb terület ábrázolására használjuk a vetületet, akkor két pontot kell kiválasztani az ábrázolt terület határai mellett a középvonalon, és ennek a két pontnak a szélességéből és hosszúságából számíthatóak a különböző paraméterek. Egy másik megközelítés szerint úgy is paraméterezhető, hogy a középvonal egy pontját, és az e pontbeli azimutját (északkal bezárt szögét) adjuk meg. Egy harmadik megközelítés azonban a Föld nagyterjedésű területeinek térképezéséhez használható jó közelítéssel. Itt egy segédföldrajzi hálózatban kell megadnunk pólus helyét, vagyis a segédpólust kell meghatároznunk a segédegyenlítővel, tehát a középvonallal. Ezekhez a paraméterezésekhez a képletek adottak mind gömbre, mind ellipszoidra.

4.5. A gömbi vetületi egyenletek

Mint ahogy azt már írtam fentebb, többféleképpen paraméterezhetjük a ferdetengelyű Mercator-vetületet. Az alábbiakban ezeket sorolom fel, és megadom a hozzá tartozó vetületi egyenleteket J. P. Snyder: Map Projections – A Working Manual című könyvének jelöléseit alkalmazva.

1. Adjuk meg két pont gömbi földrajzi koordinátáit, tehát a (φ_1, λ_1) és a (φ_2, λ_2) értékét, amelyek a középvonalon fekszenek. A számításokhoz először is adjuk meg a segédpólus koordinátáit, a φ_p és a λ_p értéket, amelyeket az alábbi képletekből számíthatunk ki:

$$\lambda_p = [(\cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \cos \lambda_1 - \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \cos \lambda_2) /$$
$$(\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin \lambda_2 - \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \sin \lambda_1)]$$
$$\varphi_p = \arctg[-\cos(\lambda_p - \lambda_1) / \tg \varphi_1]$$

A másik segédpólus a $-\varphi_p$ és a $\lambda_p \pm \pi$ helyen van. Pozitív értékűnek az északi segédpólust választjuk. A következő lépésben a derékszögű síkkoordinátákat (x, y) , és a hossztorzulási tényezőt (k) határozzuk a középvonal egy pontjának (φ, λ) , és a központi hossztorzulási együttható (k_0) értékéből. A koordináta-rendszer északkeleti tájékozású. A képletekben szereplő R a gömb sugara. A képletek a következők:

$$x = R \cdot k_0 \cdot \arctg\{[\tg \varphi \cdot \cos \varphi_p + \sin \varphi_p \cdot \sin(\lambda - \lambda_0)] / \cos(\lambda - \lambda_0)\}$$
$$y = (R/2) \cdot k_0 \cdot \ln[(1 + A)/(1 - A)]$$
$$k = k_0 / (1 - A^2)^{1/2}$$

ahol

$$A = \sin \varphi_p \cdot \sin \varphi - \cos \varphi_p \cdot \cos \varphi \cdot \sin(\lambda - \lambda_0)$$

Ezekkel a képletekkel kiszámolható a derékszögű koordináta-rendszer kezdőpontja is:

$$\varphi_0 = 0$$
$$\lambda_0 = \lambda_p + \pi/2$$

2. Adjuk meg a középvonalon egy pont gömbi földrajzi koordinátáit, tehát egy középpontot (φ_c, λ_c) , és a középvonal azimutját (β) ebben a pontban. A földrajzi hosszúság kelet felé, és Greenwich-től növekszik. Előtte azonban a segédpólus helyzetét határozzuk meg:

$$\varphi_p = \arcsin(\cos \varphi_c \cdot \sin \beta)$$

$$\lambda_p = \arctg[-\cos \beta / (-\sin \varphi_c \cdot \sin \beta)] + \lambda_c$$

Majd az 1. változat képleteit használjuk fel a derékszögű síkkoordináták kiszámításához:

$$x = R \cdot k_0 \cdot \arctg\{[tg\varphi \cdot \cos \varphi_p + \sin \varphi_p \cdot \sin(\lambda - \lambda_0)] / \cos(\lambda - \lambda_0)\}$$

$$y = (R/2) \cdot k_0 \cdot \ln[(1 + A)/(1 - A)]$$

$$k = k_0 / (1 - A^2)^{1/2}$$

ahol

$$A = \sin \varphi_p \cdot \sin \varphi - \cos \varphi_p \cdot \cos \varphi \cdot \sin(\lambda - \lambda_0)$$

3. Adjuk meg a pólus helyzetét a középvonalhoz képest, magyarul adjuk meg a segédpólus gömbi földrajzi koordinátáit (φ_p, λ_p) . Mivel itt a segédpólus koordinátáit adtuk meg, ezért a számításokból kihagyhatjuk az első lépést, tehát a segédpólusra vonatkozó számításokat. Így a vetületi egyenletek az 1. változat alapján a következők:

$$x = R \cdot k_0 \cdot \arctg\{[tg\varphi \cdot \cos \varphi_p + \sin \varphi_p \cdot \sin(\lambda - \lambda_0)] / \cos(\lambda - \lambda_0)\}$$

$$y = (R/2) \cdot k_0 \cdot \ln[(1 + A)/(1 - A)]$$

$$k = k_0 / (1 - A^2)^{1/2}$$

ahol

$$A = \sin \varphi_p \cdot \sin \varphi - \cos \varphi_p \cdot \cos \varphi \cdot \sin(\lambda - \lambda_0)$$

Az inverz vetületi számításoknál a derékszögű koordinátákból számoljuk ki a gömbi földrajzi koordinátákat. Itt is először meg kell határoznunk a segédpólus koordinátáit, ha azok még nem ismertek. A segédpólusra vonatkozó egyenletek így:

$$\lambda_p = [(\cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \cos \lambda_1 - \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \cos \lambda_2) /$$

$$(\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin \lambda_2 - \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \sin \lambda_1)]$$

$$\varphi_p = \arctg[-\cos(\lambda_p - \lambda_1) / \operatorname{tg} \varphi_1]$$

vagy

$$\varphi_p = \arcsin(\cos \varphi_c \cdot \sin \beta)$$

$$\lambda_p = \arctg[-\cos \beta / (-\sin \varphi_c \cdot \sin \beta)] + \lambda_c$$

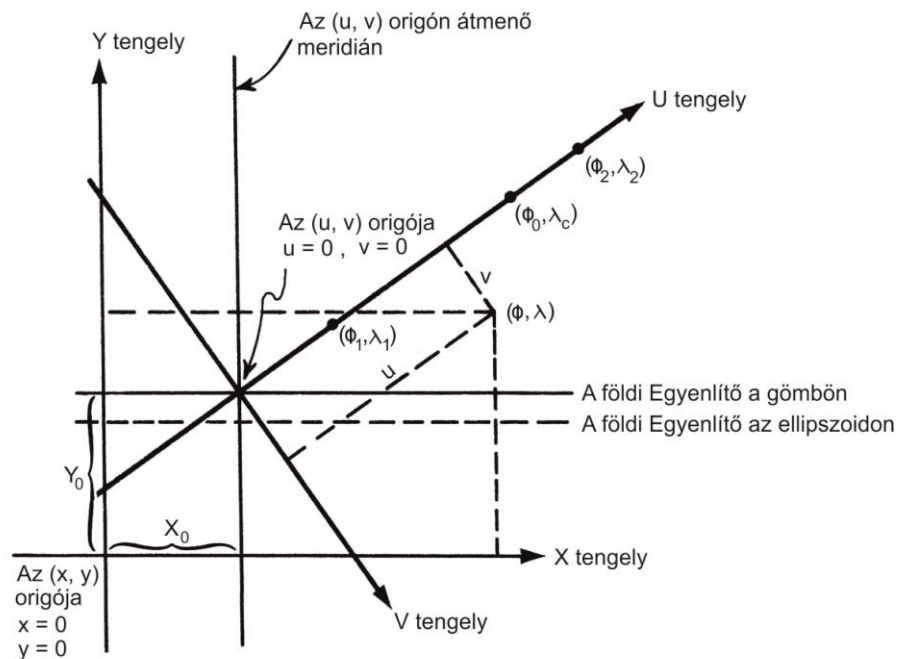
Ezután a φ és a λ meghatározása következik:

$$\varphi = \arcsin[\sin \varphi_p \cdot \operatorname{tgh}(y/R \cdot k_0) + \cos \varphi_p \cdot \sin(x/R \cdot k_0) / \cosh(y/R \cdot k_0)]$$

$$\lambda = \lambda_0 + \arctg\{[\sin \varphi_p \cdot \sin(x/R \cdot k_0) - \cos \varphi_p \cdot \sinh(y/R \cdot k_0)] / \cos(x/R \cdot k_0)\}$$

4.6. Az ellipszoidi vetületi egyenletek

A leképezés ellipszoidi képleteit Hotine adta meg. Hotine azonban hiperbolikus függvényekkel adta meg képleteit, és délnyugati tájékozású koordináta-rendszert használt, viszont a hiperbolikus függvényekkel való számolások leegyszerűsítése miatt érdemes a koordináta-rendszer tájékozását északkeletre változtatni. A változtatást J. P. Snyder javasolta.



14. ábra. A Hotine-féle ferdetengelyű Mercator-vetület koordináta-rendszere

A derékszögű koordináták megadása a Hotine-féle ferdetengelyű Mercator-vetülethez u , v , vagy pedig x , y . Az u és a v koordináták tehát megfeleltethetőek az x és y koordinátáknak. Az u koordináta az x értékének feleltethető meg, a v pedig a $-y$ -nak. Az u keleti irányban növekszik az origótól a középvonalon, a v pedig déli irányba a középvonalra merőlegesen a délnyugati tájékozásnak megfelelően. Az u és v koordinátákat egy U -val és V -vel jelölt koordináta-rendszerben helyezhetjük el. A Hotine-féle rendszerben az x és y koordinátákat az u -ból, és a v -ből számítjuk, mint „helyesbített” x és y koordinátákat. Ezeket a „helyesbített” értékeket egy X -szel és Y -nal jelölt koordináta-rendszerben helyezhetjük el. Az Y tengely a középponton áthaladó meridián képe, az X tengely pedig erre merőlegesen halad ugyanebben a pontban. A koordináta-rendszer északkeleti tájolású, és a transzverzális Mercator-vetülethez hasonlatos az elhelyezése.

HOM-vetületben az u és v koordináták kezdőpontja a vetület középvonalának és a Gauss-gömbön lévő földi Egyenlítőnek a metszéspontja. Ez tulajdonképpen egy elméleti hely, azonban a vetületi koordináta-rendszer origója itt helyezkedik el, ahonnan viszonyítva a koordináták egyértelműen meghatározhatóak. A leképezés tehát az ellipszoidról erre a közbülső gömbre, a Gauss-gömbre történik első lépésben, melyet az angol szakirodalmak „aposphere” néven írnak le, majd második lépésben történik a síkra való vetítés. A Hotine-féle ferdetengelyű Mercator-vetület teljesen szögtartó, azonban a hossztartás a középvonal mentén nem teljes, csak egy vagy két kiválasztott pontban áll fenn. Érdeemes még megemlíteni, hogy Rosenmund 1903-as, Laborde 1928-as, és Cole 1943-as ellipszoidi ferdetengelyű Mercator-vetületi változatában a középvonal egy gömbi főkörív a közbülső szögtartó gömbön, nem pedig egy geodéziai vonal, egy ortodróma. A vetület ellipszoidi megközelítésénél kétféleképpen paraméterezhető a vetület.

„A” verzió: Adjuk meg két pont ellipszoidi földrajzi koordinátáit, (Φ_1, Λ_1) és (Φ_2, Λ_2) értékét, amelyek a középvonalon haladnak át. A két pont ellipszoidi koordinátái mellett még meg kell adnunk a k_0 hossztorzulási együtthatót, a Φ_0 -t, azaz a vetületi középpont ellipszoidi szélességét, a referenciaellipszoid fél nagytengelyét (a), és az első numerikus excentricitását (e), valamint annak a pontnak a koordinátáit (Φ, Λ) , aminek meg akarjuk határozni a derékszögű síkkoordinátáit. Az így megadott paraméterek segítségével határozhatjuk meg az x , y , és k értékét. Meg kell jegyezni azonban, hogy nem Hotine képletei fognak szerepelni, mivel ő hiperbolikus függvényekkel adta meg a

vetületet, és ezek igen csak bonyolultak. Az alábbiakban J. P. Snyder egyszerűsített, szögfüggvényekkel megadott képletei fognak szerepelni. A derékszögű koordinátákat tehát az alábbi képletekkel számolhatjuk ki:

$$B = [1 + e^2 \cdot \cos^4 \Phi_0 / (1 - e^2)]^{1/2}$$

$$A = a \cdot B \cdot k_0 \cdot (1 - e^2)^{1/2} / (1 - e^2 \cdot \sin^2 \Phi_0)$$

$$t_0 = \operatorname{tg}(\pi/4 - \Phi_0/2) / [(1 - e \cdot \sin \Phi_0) / (1 + e \cdot \sin \Phi_0)]^{e/2}$$

$$t_1 = \operatorname{tg}(\pi/4 - \Phi_1/2) / [(1 - e \cdot \sin \Phi_1) / (1 + e \cdot \sin \Phi_1)]^{e/2}$$

$$t_2 = \operatorname{tg}(\pi/4 - \Phi_2/2) / [(1 - e \cdot \sin \Phi_2) / (1 + e \cdot \sin \Phi_2)]^{e/2}$$

$$D = B \cdot (1 - e^2)^{1/2} / [\cos \Phi_0 \cdot (1 - e^2 \cdot \sin^2 \Phi_0)^{1/2}]$$

$$E = [D \pm (D^2 - 1)^{1/2}] t_0^B$$

Ha Φ_0 pozitív, tehát az északi féltekén vagyunk a Földnek, akkor " + " előjelet kell használnunk, ha Φ_0 negatív, tehát a déli féltekén vagyunk, akkor " - " előjelet.

$$H = t_1^B$$

$$L = t_2^B$$

$$F = E/H$$

$$G = (F - 1/F)/2$$

$$J = (E^2 - L \cdot H) / (E^2 + L \cdot H)$$

$$P = (L - H) / (L + H)$$

$$\Lambda_0 = (\Lambda_1 + \Lambda_2) / 2 - \operatorname{arctg}\{J \cdot \operatorname{tg}[B \cdot (\Lambda_1 - \Lambda_2) / 2]\} / B$$

$$\gamma_0 = \operatorname{arctg}\{\sin[B \cdot (\Lambda_1 - \Lambda_0)] / G\}$$

$$\alpha_c = \operatorname{arcsin}[D \cdot \sin \gamma_0]$$

$$t = \operatorname{tg}(\pi/4 - \Phi/2) / [(1 - e \cdot \sin \Phi) / (1 + e \cdot \sin \Phi)]^{e/2}$$

$$Q = E/t^B$$

$$S = (Q - 1/Q)/2$$

$$T = (Q + 1/Q)/2$$

$$V = \sin[B \cdot (\Lambda - \Lambda_0)]$$

$$U = (-V \cdot \cos \gamma_0 + S \cdot \sin \gamma_0)/T$$

$$v = A \cdot \ln[(1 - U)/(1 + U)]/(2 \cdot B)$$

$$u = A \cdot \arctg\{(S \cdot \cos \gamma_0 + V \cdot \sin \gamma_0)/\cos[B \cdot (\Lambda - \Lambda_0)]\}/B$$

$$k = A \cdot \cos(B \cdot u/A) \cdot (1 - e^2 \cdot \sin^2 \Phi)^{1/2}/\{a \cdot \cos \Phi \cdot \cos[B \cdot (\Lambda - \Lambda_0)]\}$$

A „helyesbített” x és y koordinátákat az u és v koordinátákból számolhatjuk ki. Az x és y értékének meghatározásánál fellép az x_0 és y_0 eltolási paraméter, ami az u és v koordináták kezdőpontjától, azaz origójától mért távolsága az X és Y tengelyen mérve.

$$x = v \cdot \cos \alpha_c + u \cdot \sin \alpha_c + x_0$$

$$y = u \cdot \cos \alpha_c - v \cdot \sin \alpha_c + y_0$$

Az „A” verzió inverz vetületi egyenleteinél az ellipszoidi földrajzi koordinátákat, azaz a Φ és a Λ értékét az x és y , vagy az u és v koordinátákból állapíthatjuk meg. A számoláshoz szükséges képletek:

$$B = [1 + e^2 \cdot \cos^4 \Phi_0 / (1 - e^2)]^{1/2}$$

$$A = a \cdot B \cdot k_0 \cdot (1 - e^2)^{1/2} / (1 - e^2 \cdot \sin^2 \Phi_0)$$

$$t_0 = \operatorname{tg}(\pi/4 - \Phi_0/2) / [(1 - e \cdot \sin \Phi_0)/(1 + e \cdot \sin \Phi_0)]^{e/2}$$

$$t_1 = \operatorname{tg}(\pi/4 - \Phi_1/2) / [(1 - e \cdot \sin \Phi_1)/(1 + e \cdot \sin \Phi_1)]^{e/2}$$

$$t_2 = \operatorname{tg}(\pi/4 - \Phi_2/2) / [(1 - e \cdot \sin \Phi_2)/(1 + e \cdot \sin \Phi_2)]^{e/2}$$

$$D = B \cdot (1 - e^2)^{1/2} / [\cos \Phi_0 \cdot (1 - e^2 \cdot \sin^2 \Phi_0)^{1/2}]$$

$$E = [D \pm (D^2 - 1)^{1/2}] t_0^B$$

Ha Φ_0 pozitív, tehát az északi féltekén vagyunk a Földnek, akkor " + " előjelet kell használnunk, ha Φ_0 negatív, tehát a déli féltekén vagyunk, akkor " - " előjelet.

$$H = t_1^B$$

$$L = t_2^B$$

$$F = E/H$$

$$G = (F - 1/F)/2$$

$$J = (E^2 - L \cdot H)/(E^2 + L \cdot H)$$

$$P = (L - H)/(L + H)$$

$$\Lambda_0 = (\Lambda_1 + \Lambda_2)/2 - \arctg\{J \cdot \tg[B \cdot (\Lambda_1 - \Lambda_2)/2]\}/B$$

$$\gamma_0 = \arctg\{\sin[B \cdot (\Lambda_1 - \Lambda_0)]/G\}$$

$$\alpha_c = \arcsin[D \cdot \sin \gamma_0]$$

$$v = (x - x_0) \cdot \cos \alpha_c - (y - y_0) \cdot \sin \alpha_c$$

$$u = (y - y_0) \cdot \cos \alpha_c + (x - x_0) \cdot \sin \alpha_c$$

$$Q' = e^{-(B \cdot v/A)}$$

$$S' = (Q' - 1/Q')/2$$

$$T' = (Q' + 1/Q')/2$$

$$V' = \sin(B \cdot u/A)$$

$$U' = (V' \cdot \cos \gamma_0 + S' \cdot \sin \gamma_0)/T'$$

$$t = \{E/[(1 + U')/(1 - U')]^{1/2}\}^{1/B}$$

$$\Phi' = \pi/2 - 2 \cdot \arctg\{t \cdot [(1 - e \cdot \sin \Phi)/(1 + e \cdot \sin \Phi)]^{e/2}\}$$

Ezt az egyenletet iterációval kell megoldanunk. Az első érték kiszámításához Φ helyébe a $\Phi = \left(\frac{\pi}{2} - 2 \cdot \arctg t\right)$ értéket kell beírni, majd utána a kapott Φ' -t kell a Φ helyére beírni, és így tovább. Addig kell ezt folytatni, míg a számolás eredményeként két egymás melletti eredmény különbsége egy adott hibahatár alatt nem lesz.

$$\Lambda = \Lambda_0 - \arctg[(S' \cdot \cos \gamma_0 - V' \cdot \sin \gamma_0)/\cos(B \cdot u/A)]/B$$

Ha azonban szeretnénk az iterációt elkerülni, akkor az alábbi képlettel kell számolnunk, ami egy sorfejtésből eredeztethető:

$$\begin{aligned}\Phi = & \chi + \sin(2 \cdot \chi) \cdot (e^2/2 + 5 \cdot e^4/24 + e^6/12 + 13 \cdot e^8/360) \\ & + \sin(4 \cdot \chi) \cdot (7 \cdot e^4/48 + 29 \cdot e^6/240 + 811 \cdot e^8/11520) \\ & + \sin(6 \cdot \chi) \cdot (7 \cdot e^6/120 + 81 \cdot e^8/1120) \\ & + \sin(8 \cdot \chi) \cdot (4279 \cdot e^8/161280)\end{aligned}$$

ahol

$$\chi = \pi/2 - 2 \cdot \arctg t$$

„B” verzió: Adjunk meg egy középpontot a vetület középvonalán ellipszoidi földrajzi koordinátákkal (Φ_0, Λ_c) , és a középvonal azimutját (α_c) , ami a középponton halad át. A számításokhoz még meg kell adnunk az alábbi paramétereket is: a , e , k_0 , valamint Φ és Λ értékét. Ezek után számíthatjuk az u , v és x , y koordinátákat, illetve a k értékét az alábbi képletekből:

$$B = [1 + e^2 \cdot \cos^4 \Phi_0 / (1 - e^2)]^{1/2}$$

$$A = a \cdot B \cdot k_0 \cdot (1 - e^2)^{1/2} / (1 - e^2 \cdot \sin^2 \Phi_0)$$

$$t_0 = \operatorname{tg}(\pi/4 - \Phi_0/2) / [(1 - e \cdot \sin \Phi_0) / (1 + e \cdot \sin \Phi_0)]^{e/2}$$

$$D = B \cdot (1 - e^2)^{1/2} / [\cos \Phi_0 \cdot (1 - e^2 \cdot \sin^2 \Phi_0)^{1/2}]$$

$$F = D \pm (D^2 - 1)^{1/2}$$

Ha Φ_0 pozitív, tehát az északi féltekén vagyunk a Földnek, akkor " + " előjelet kell használnunk, ha Φ_0 negatív, tehát a déli féltekén vagyunk, akkor " - " előjelet.

$$E = F \cdot t_0^B$$

$$G = (F - 1/F)/2$$

$$\gamma_0 = \arcsin(\sin \alpha_c / D)$$

$$\Lambda_0 = \Lambda_c - [\arcsin(G \cdot \operatorname{tg} \gamma_0)] / B$$

$$u_{(\Phi_0, \Lambda_c)} = \pm (A/B) \cdot \arctg[(D^2 - 1)^{1/2} / \cos \alpha_c]$$

$$v_{(\Phi_0, \Lambda_c)} = 0$$

$$Q = E/t^B$$

$$S = (Q - 1/Q)/2$$

$$T = (Q + 1/Q)/2$$

$$V = \sin[B \cdot (\Lambda - \Lambda_0)]$$

$$U = (-V \cdot \cos \gamma_0 + S \cdot \sin \gamma_0)/T$$

$$v = A \cdot \ln[(1 - U)/(1 + U)]/(2 \cdot B)$$

$$u = A \cdot \arctg\{(S \cdot \cos \gamma_0 + V \cdot \sin \gamma_0)/\cos[B \cdot (\Lambda - \Lambda_0)]\}/B$$

$$k = A \cdot \cos(B \cdot u/A) \cdot (1 - e^2 \cdot \sin^2 \Phi)^{1/2}/\{a \cdot \cos \Phi \cdot \cos[B \cdot (\Lambda - \Lambda_0)]\}$$

$$x = v \cdot \cos \alpha_c + u \cdot \sin \alpha_c + x_0$$

$$y = u \cdot \cos \alpha_c - v \cdot \sin \alpha_c + y_0$$

A „B” verzió inverz vetületi egyenleteinél, hasonlóan az ezelőtti verzió inverzéhez, itt is az ellipszoidi földrajzi koordinátákból állapítjuk meg a síkkoordinátákat, amelyekhez a következő vetületi egyenletek tartoznak:

$$B = [1 + e^2 \cdot \cos^4 \Phi_0 / (1 - e^2)]^{1/2}$$

$$A = a \cdot B \cdot k_0 \cdot (1 - e^2)^{1/2} / (1 - e^2 \cdot \sin^2 \Phi_0)$$

$$t_0 = \operatorname{tg}(\pi/4 - \Phi_0/2) / [(1 - e \cdot \sin \Phi_0)/(1 + e \cdot \sin \Phi_0)]^{e/2}$$

$$D = B \cdot (1 - e^2)^{1/2} / [\cos \Phi_0 \cdot (1 - e^2 \cdot \sin^2 \Phi_0)^{1/2}]$$

$$F = D \pm (D^2 - 1)^{1/2}$$

Ha Φ_0 pozitív, tehát az északi féltekén vagyunk a Földnek, akkor " + " előjelet kell használnunk, ha Φ_0 negatív, tehát a déli féltekén vagyunk, akkor " - " előjelet.

$$E = F \cdot t_0^B$$

$$G = (F - 1/F)/2$$

$$\gamma_0 = \arcsin(\sin \alpha_c / D)$$

$$\Lambda_0 = \Lambda_c - [\arcsin(G \cdot \operatorname{tg} \gamma_0)] / B$$

$$v = (x - x_0) \cdot \cos \alpha_c - (y - y_0) \cdot \sin \alpha_c$$

$$u = (y - y_0) \cdot \cos \alpha_c + (x - x_0) \cdot \sin \alpha_c$$

$$Q' = e^{-(B \cdot v / A)}$$

$$S' = (Q' - 1/Q') / 2$$

$$T' = (Q' + 1/Q') / 2$$

$$V' = \sin(B \cdot u / A)$$

$$U' = (V' \cdot \cos \gamma_0 + S' \cdot \sin \gamma_0) / T'$$

$$t = \{E / [(1 + U') / (1 - U')]^{1/2}\}^{1/B}$$

Az ellipszoidi földrajzi szélesség, avagy a Φ kiszámolására két fajta eljárást is alkalmazhatunk. Az első egy iterációs módszer, a második pedig egy sorfejtéses képlet. Az iterációs képlet a következő:

$$\Phi' = \pi/2 - 2 \cdot \operatorname{arctg}\{t \cdot [(1 - e \cdot \sin \Phi) / (1 + e \cdot \sin \Phi)]^{e/2}\}$$

Értékét az „A” verzió inverz képleteinél leírt módon kell kiszámítani!

$$\Lambda = \Lambda_0 - \operatorname{arctg}[(S' \cdot \cos \gamma_0 - V' \cdot \sin \gamma_0) / \cos(B \cdot u / A)] / B$$

A sorfejtéses képlet pedig a következő:

$$\begin{aligned} \Phi = & \chi + \sin(2 \cdot \chi) \cdot (e^2/2 + 5 \cdot e^4/24 + e^6/12 + 13 \cdot e^8/360) \\ & + \sin(4 \cdot \chi) \cdot (7 \cdot e^4/48 + 29 \cdot e^6/240 + 811 \cdot e^8/11520) \\ & + \sin(6 \cdot \chi) \cdot (7 \cdot e^6/120 + 81 \cdot e^8/1120) \\ & + \sin(8 \cdot \chi) \cdot (4279 \cdot e^8/161280) \end{aligned}$$

ahol

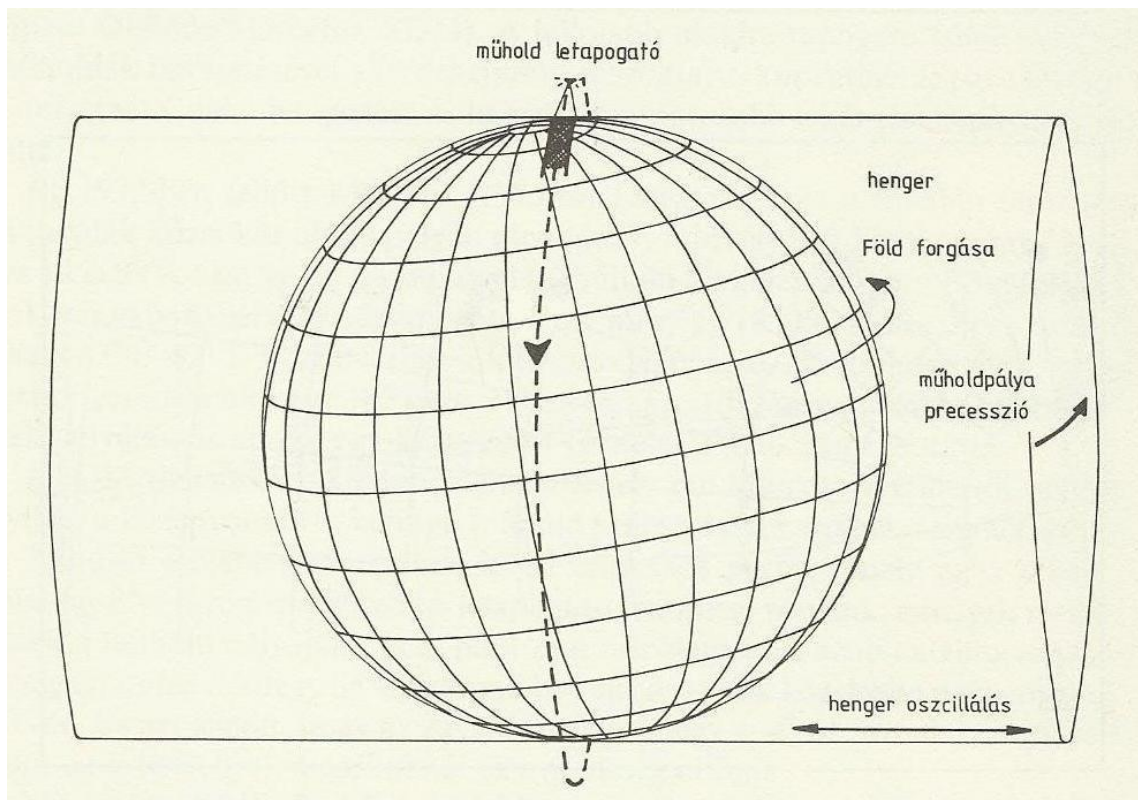
$$\chi = \pi/2 - 2 \cdot \operatorname{arctg} t$$

5. A Space Oblique Mercator

A Space Oblique Mercator, azaz az űrbéli Mercator-vetület a ferdetengelyű Mercator-vetület egyik új, ún. űrvetülete. A USGS, azaz a United States Geological Survey fejlesztette ki a műholdképek, vagyis a Landsat műhold képeinek megjelenítésére. Az űrvetületekre azért van szükség a műholdképek megjelenítésénél, mert a földi állandósult vetületek nem elég pontosak a megjelenítés során. Ennek oka az, hogy a műholdak keringése és a Föld forgása következtében fellép az időtényező, amelyet a vetítés során bele kell kalkulálni, mint korrekciós tényezőt.

A térképező műholdak, így a Landsat típusú műholdak egyszerűen megfogalmazva kör alakú pályán mozognak, 919 km magasan a Föld felszínétől számítva. Pontosabban kifejezve napszinkron, kvázipoláris pályán keringenek. A napszinkron pálya azt jelenti, hogy a műhold adott földrajzi szélességeken adott időpontokban halad át. Az Egyenlítő felett például helyi idő szerint 9:30 és 10:00 között halad át valamennyi Landsat típusú műhold. A kvázipoláris kifejezés pedig azt fejezi ki, hogy a műhold a pólusok közelében halad el. A műholdpálya síkja 99° -os szöveget zár be a Föld Egyenlítőjének síkjával. A Landsat letapogatási szélessége a Föld felszínén mintegy 185 km, így a Földön az északi szélesség 82° -tól a déli szélesség 82° -ig terjedő területeket tapogatja le a műhold. Az e szélességek közötti teljes letapogatáshoz 251 keringésre van szüksége a műholdnak. Mivel egy keringés ideje 103 perc, ebből kiszámolható, hogy 251 keringéshez hozzávetőleg 18 nap szükséges.

A vetület azért alkalmas a műholdképek megjelenítésére, mivel a műholdpálya alatt a Föld felszínén a leképezés során nincs torzítás. Ez olyan, mintha egy henger a műholdpálya alatt érintené a Föld felszínét. Ez a vetület tehát alkalmas a műholdképek folyamatos térképezésére.



15. ábra. A SOM, avagy az űrbéli ferdetengelyű Mercator-vetület (Stegena Lajos: Vetülettan)

Mivel a műholdpálya alatt a Föld felszínén nincs torzulás, mint ahogy már említettem, így a műholdpálya menti szűk sávban alkalmazható a legjobban a vetület. A SOM-vetületű térképek a műholdpályát, mint központi vonalat, egy görbeként, egy ívelt vonalként mutatják a térképen, ami így különbözik a ferdetengelyű Mercator-vetület középvonalától, mivel az egyenesként képződik le. Fokhálózati képére az a jellemző, hogy két meridiánt kivéve, az összes meridián és paralelkör görbült vonal. Azonban míg a ferdetengelyű Mercator-vetületnél ezek az egyenesként leképződő meridiánok egymástól 180° -ra helyezkednek el, addig ez az űrbéli Mercator-vetületnél 167° . Ennek oka az, hogy a műhold keringése alatt a Föld 26° hosszúságot elfordul. A SOM-vetület nem egészen szögtartó, azonban a szögtorzulást figyelmen kívül hagyhatjuk a műholdas letapogatás zónájában. Gömb alapfelület esetén tehát nincs hossztorzulás a középvonal mentén (a műholdpálya alatt), viszont ellipszoid esetén számolni kell egy csekély hossztorzulással, ami $0,0005\%$. A hossztorzulás átlagosan mintegy $0,015\%$ a középvonaltól 1° távolságra. A. P. Colvocoresses, J. P. Snyder, és J. L. Junkins fejlesztette ki 1973-1979. között.

6. Az EOV közelítése HOM-vetülettel

Ebben a fejezetben, mint azt a cím is mutatja, a magyar térképezésben 1975 óta használt Egységes Országos Vetületet (EOV) hasonlítom össze a külföldi országokban ismertebb, és szélesebb körben használt Hotine-féle ferdetengelyű Mercator-vetülettel (HOM). Az összehasonlítás mellett a Hotine-féle ferdetengelyű Mercator-vetület vetületi egyenleteit felhasználva próbáltam közelíteni az EOV koordinátákat a lehető legpontosabban. A vetületi egyenletek paramétereit természetesen az EOV vetületi egyenleteiben használt paraméterekkel helyettesítettem.

Ezen összehasonlítás, és az egész szakdolgozatom alapja Molnár Gábor és Timár Gábor munkája, mely 2002-ben a Geodézia és Kartográfia című szaklapban jelent meg „Az EOV-koordináták nagy pontosságú közelítése Hotine-féle ferdetengelyű Mercator-vetülettel” címmel. Dolgozatuk célja az volt, mint a saját szakdolgozatom egyik fő témája is egyben, hogy az EOV koordinátákat a Hotine-féle ferdetengelyű Mercator-vetület koordinátáiként elfogadható pontossággal közelítsék. Ezen felül a közelítés hibájának a becslését és értékelését is leírták dolgozatukban.

Az összehasonlítás indíttatása az volt, hogy a különböző térinformatikai szoftverek többségében nincs lehetőség arra, hogy az EOV-t, mint beépített vetületet kiválasszuk. Azonban ha nincsen beépítve az EOV az adott programcsomagba, akkor meg kell próbálkoznunk azzal, hogy az EOV-t más vetülettel helyettesítsük, illetve közelítsük. Ez a helyettesítő vetület pedig a Hotine-féle ferdetengelyű Mercator-vetület, amely a legtöbb térinformatikai szoftverben benne van, és az EOV jól közelíthető vele. Az alábbiakban, Dr. Elek István jóvoltából, felsorolok pár ismertebb térinformatikai szoftvert, amikben az EOV, mint vetület be van építve, és néhányat, amelyekben nincs.

Térinformatikai szoftverek, amelyekben van beépített EOV:

- ArcGIS (HD72)
- ArcMap (HD72)
- MapInfo (Van beépített EOV, de hibás eredményt ad.)
- Global Mapper (HD72)
- QGIS

Térinformatikai szoftverek, amelyekben nincs beépített EOVS:

- GeoMedia (Van hozzá magyar kiegészítő fájl, amiben van EOVS.)
- ER Mapper
- ERDAS Imagine
- ENVI
- GRASS

Azokban a szoftverekben, ahol az EOVS be van építve, általában „Hungarian Grid” vagy „Hungarian EOVS” néven találhatjuk meg őket. Az ezt helyettesítő vetület megnevezése pedig „Hotine Oblique Mercator” vagy „Rectified Skew Ortomorphic” néven fut.

6.1. A vetületek összehasonlítása

Az Egységes Országos Vetület, vagyis EOVS egy ferdetengelyű szögtartó redukált, azaz metsző vagy süllyesztett hengervetület. A leképezés két lépésben történik, vagyis a vetület az ún. kettős leképezést alkalmazza. Ez azt jelenti, hogy a leképezés az ellipszoidról, az EOVS esetében itt a HD72 geodéziai dátumról történik a magyarországi új Gauss-gömbre Gauss-féle igen kis hossztorzulású szögtartó gömbvetülettel első lépésben. Második lépésben pedig erről a Gauss-simulógömből történik a vetítés a hengerre, szintén szögtartó módon (ábra: simuló).

A Hotine-féle ferdetengelyű Mercator-vetület, vagyis HOM-vetület leírásakor látni fogjuk, hogy igencsak alkalmas az EOVS helyettesítésére. Az EOVS-hez hasonlóan a HOM-vetület is egy ferdetengelyű szögtartó hengervetület, melynek alapfelülete egy ellipszoid. Eltérés azonban, hogy a HOM érintő elhelyezésű, nem pedig redukált hengervetület. Kettős leképezésről itt nem beszélhetünk, mint az EOVS esetében. Azonban az EOVS egyediségét nem ez a különbség határozza meg, hanem az, hogy a vetület normálparallelkörének a szélessége nem egyezik meg a vetület kezdőpontjának a szélességével. Ez azt jelenti, hogy a Gauss-simulógömböt az ellipszoid más szélességen érinti, mint a henger. A vetület normálparallelköre az a hossztartó szélesség, ahol a Gauss-gömb érinti az ellipszoidot, a kezdőpont szélessége pedig ott van, ahol a henger érinti azt, vagyis az ellipszoidot. A különlegessége tehát ebben áll, hogy e két szélességet az EOVS esetében külön paraméterezik. Molnár Gábor és Timár Gábor leírása szerint sem szakirodalmakban, sem az interneten nem találtak olyan vetítést, ahol ezen két szélesség paraméterezése külön történik. Ezek mellett pedig olyan

térinformatikai szoftvert sem sikerült találniuk, ahol szintén megoldott lenne ez a probléma.

Az EOVS tehát, mint azt írtam, egy ferdetengelyű szögtartó hengervetület. Hazánk nemzeti koordináta-rendszere ezen a leképezésen alapszik. Azonban nem Magyarország az egyetlen ország, ahol ezt a leképezést alkalmazzák, azonban az igaz, hogy használata nem nevezhető általánosnak és gyakorinak. Svájc régebbi (Rosenmund, 1903.) és újabb (Bolliger, 1967.) topográfiai térképezése is például egy ferdetengelyű szögtartó hengervetületen alapszik, tehát az EOVS-hoz hasonló vetületen. Továbbá a madagaszkári (Laborde, 1928.), a borneói, illetve később a malájföldi (Hotine, 1947.) rendszer is hasonló vetületen alapszik. Az EOVS helyettesítésére használt Hotine-féle ferdetengelyű Mercator-vetületet tehát eredetileg a malájföldi területekhez készítette Hotine, brit geodéta. A második világháború folyamán a vetületet Olaszország topográfiai térképezésére is kitűnően tudták alkalmazni (Cole, 1943.). Egy újabb felhasználását említve pedig a USGS, vagyis az Egyesült Államok Geológiai Szolgálatát ezt a vetületet választotta Alaszka megjelenítésére (Snyder, 1987.). Összességében kijelenthető, hogy a vetületet olyan helyeken alkalmazzák leginkább, ahol az ábrázolni kívánt terület egy főkör menti szűk sávban található.

6.2. A HOM-vetület egyenleteinek átírása az EOVS alapján

Az EOVS koordináták közelítéséhez és számításához a ferdetengelyű Mercator-vetület ellipszoidi egyenleteinek „B” verzióját használom fel, hasonlóan, mint Molnár Gábor és Timár Gábor tette ezt saját dolgozatában. Ezen „B” verzió lényege az, amint már leírtam egy korábbi fejezetben, hogy úgy paraméterezzük a vetületet, hogy megadunk egy középpontot a vetület középvonalán ellipszoidi földrajzi koordinátaival, továbbá a középvonal azimutját. Az egyenletek átírásának megfelelően meg kell adnunk az EOVS paramétereit a vetület jelöléseinek megfelelően, amelyek a következők:

$$a = 6\,378\,160 \text{ m}$$

$$e = 0,0818205679407$$

$$k_0 = 0,99993$$

$$\alpha_c = 90^\circ$$

$$\Phi_0 = 47,14439372^\circ$$

$$\Lambda_c = 0^\circ$$

A paraméterek között szereplő a az IUGG'67 forgási ellipszoid fél nagytengelye, az e pedig ennek az első numerikus excentricitása. A k_0 a méretaránytényező, az α_c a vetületi középpontban lévő azimutja a vetületi középvonalnak, $sign(x)$ pedig az előjelfüggvény jelölése. A Φ_0 és a Λ_c pedig a vetületi középvonalon elhelyezkedő középpont ellipszoidi koordinátái. Továbbá szerepel az egyenletekben a Φ és a Λ , amelyek az átszámolni kívánt pont ellipszoidi koordinátáit adják meg. Végül az átszámított EOVSíkkoordinátákat az X és az Y értéke fogja megadni.

Az olvasó hiányolhatná a Φ_n normálparalelkört a paraméterek közül, vagyis azt a hossztartó szélességet, amely mentén a Gauss-gömb érinti az ellipszoidot. Azonban a szabványos ferdetengelyű Mercator-vetület esetében a normálparalelkör ellipszoidi szélessége megegyezik a vetületi középpont ellipszoidi szélességével, vagyis fennáll a következő egyenlőség:

$$\Phi_n = \Phi_0$$

Miután tehát meghatároztuk az EOVS-ra átírt ferdetengelyű Mercator-vetület paramétereit, ezután a vetületi egyenleteket írjuk le, amelyekkel az EOVS koordinátákat közelíteni lehet. Az egyenletek tehát:

$$B = [1 + e^2 \cdot \cos^4 \Phi_0 / (1 - e^2)]^{1/2}$$

$$A = a \cdot B \cdot k_0 \cdot (1 - e^2)^{1/2} / (1 - e^2 \cdot \sin^2 \Phi_0)$$

$$t_0 = \operatorname{tg}(\pi/4 - \Phi_0/2) / [(1 - e \cdot \sin \Phi_0) / (1 + e \cdot \sin \Phi_0)]^{e/2}$$

$$D = B \cdot (1 - e^2)^{1/2} / [\cos \Phi_0 \cdot (1 - e^2 \cdot \sin^2 \Phi_0)^{1/2}]$$

$$F = D \pm (D^2 - 1)^{1/2}$$

Ha Φ_0 pozitív, tehát az északi féltekén vagyunk a Földnek, akkor " + " előjelet kell használnunk, ha Φ_0 negatív, tehát a déli féltekén vagyunk, akkor " - " előjelet.

$$E = F \cdot t_0^B$$

$$G = (F - 1/F)/2$$

$$\gamma_0 = \operatorname{arcsin}(\sin \alpha_c / D)$$

$$\Lambda_0 = \Lambda_c - \pi / (2 \cdot B)$$

$$u_{(\Phi_0, \Lambda_c)} = \operatorname{sign}(\Phi_0) \cdot A \cdot \pi / (2 \cdot B)$$

$$v_{(\Phi_0, \Lambda_c)} = 0$$

$$t = tg(\pi/4 - \Phi/2)/[(1 - e \cdot \sin \Phi)/(1 + e \cdot \sin \Phi)]^{e/2}$$

$$Q = E/t^B$$

$$S = (Q - 1/Q)/2$$

$$T = (Q + 1/Q)/2$$

$$V = \sin[B \cdot (\Lambda - \Lambda_0)]$$

$$U = (-V \cdot \cos \gamma_0 + S \cdot \sin \gamma_0)/T$$

$$v = A \cdot \ln[(1 - U)/(1 + U)]/(2 \cdot B)$$

$$u = A \cdot \arctg\{(S \cdot \cos \gamma_0 + V \cdot \sin \gamma_0)/\cos[B \cdot (\Lambda - \Lambda_0)]\}/B + \text{sign}(\Lambda) \cdot u_{(\Phi_0, \Lambda_c)}$$

$$k = A \cdot \cos(B \cdot u/A) \cdot (1 - e^2 \cdot \sin^2 \Phi)^{1/2}/\{a \cdot \cos \Phi \cdot \cos[B \cdot (\Lambda - \Lambda_0)]\}$$

$$X = u + 650000$$

$$Y = 200000 - v$$

Ezek tehát azok az egyenletek, amelyeket a Hotine-féle ferdetengelyű Mercator-vetület „B” verziójának átírásával kaptunk, és amelyekkel közelíteni tudjuk az EOVS koordinátákat.

A vetületi egyenletek átírása nem pontosan egyezik meg Molnár és Timár dolgozatában szereplő egyenletekkel, és a paraméterek közül sem használtuk fel témavezetőmmel az összeset a dolgozatban szereplőkkel, illetve a paraméterezés során a Λ_c értékének nem $19,04857178^\circ$ -ot, hanem 0° -ot választottunk. Erre azért volt szükség, mivel máskülönben nem tudtunk használható eredményt kihozni a közelítés során. A paraméterek közül nem használtuk az X_0 és Y_0 koordináta-rendszeri eltolási paramétert, melyeknek értékét Molnár és Timár a következőkben szabta meg.

$$X_0 = 200000,00114 \text{ m}$$

$$Y_0 = -9370549,28432 \text{ m}$$

Az egyenleteknél pedig u és X különbözik, mivel Molnár és Timár

$$u = A \cdot \arctg\{(S \cdot \cos \gamma_0 + V \cdot \sin \gamma_0) / \cos[B \cdot (\Lambda - \Lambda_0)]\} / B + \text{sign}(\Lambda) \cdot u_{(\Phi_0, \Lambda_c)}$$

egyenlet helyett

$$u = A \cdot \arctg\{(S \cdot \cos \gamma_0 + V \cdot \sin \gamma_0) / \cos[B \cdot (\Lambda - \Lambda_0)]\} / B$$

egyenlettel számolt, illetve az

$$X = u + 650000$$

helyett

$$X = u - u_{(\Phi_0, \Lambda_c)} + 650000$$

egyenlőséget használták.

6.3. Az EOVS koordináták közelítése és a számítás menete

Az EOVS koordinátáinak közelítését Borland Turbo Pascal for Windows 1.5, röviden Turbo Pascal segítségével végeztem. A koordináták kiszámolásához, és közelítéséhez másodsorban szükségem volt egy adatbázisra. Ez az adatbázis az országhatár pontjainak EOVS koordinátái voltak méteres pontossággal megadva. Ez az országhatár pontjainak egy ritkített halmaza, és a határpontok egymástól legfeljebb 20 m-re vannak egymástól. Ezt a 2885 pontból álló adatbázist a FÖMI bocsátotta a Térképtudományi és Geoinformatika Tanszék rendelkezésére kutatási és oktatási célokra, amelyet témavezetőmtől, Dr. Györffy Jánostól megkaptam szakdolgozati számításaimhoz.

Először is a szabványos EOVS vetületi egyenleteit beprogramoztam a Turbo Pascal segítségével. Létrehoztam egy olyan programot, amely az EOVS síkkoordinátákból ellipszoidi koordinátákat számol, illetve fordítva, amely az ellipszoidi koordinátákból számol síkkoordinátákat. Első lépésben az előbbi programot használtam fel, amellyel a kapott adatbázisban lévő méteres pontosságú EOVS koordinátákat átszámítottam kilenc tizedesjegy pontosságú ellipszoidi koordinátákká, amelynek a pontossága így tehát tizedmilliméteres. A kapott eredményeket ezután az EOVS koordinátákhoz hasonlóan egy adatbázisba írtam ki, így tehát rendelkeztem már Magyarország ritkített határpontjainak ellipszoidi koordinátaival az IUGG'67-es ellipszoidon.

Ezután a kapott ellipszoidi koordinátákat a visszaszámoltam a szabványos EOVS vetület segítségével EOVS koordinátákká, de immár nem méteres pontosságú pontokká, hanem négy tizedesjegy pontosságú koordinátákká, majd később hat tizedesjegy

pontossággal. Hat tizedesjegy pontosság már a milliméter ezred részét jelenti, vagyis a pontosság ezredmilliméteres. A számítások során a Turbo Pascal-ban a változók típusát is változtattam, mivel a hagyományosnak számító REAL típus mellett kiszámoltam a koordinátákat DOUBLE, úgynevezett kétszeres pontosságú típussal is. Előzőlegesen megemlítem, hogy a két típus közel azonos eredményt adott a számítások során.

Ezután a Hotine-féle ferdetengelyű Mercator-vetület „B” verziójának, EOVSzerinti, ellipszoidi vetületi egyenleteinek beprogramozása következett. A korábban kiszámított kilenc tizedesjegy pontosságú ellipszoidi koordinátákból az EOVS közeliített síkkoordinátáit számítottam ki. Először szintén négy, majd hat tizedesjegy pontossággal, REAL, majd DOUBLE típussal. A két típus itt szintén közel hasonló eredményt adott.

6.4. A közelítés eredménye

A kapott eredmények értékeléséhez vegyük a hat tizedesjegy pontossággal, és DOUBLE típussal kiszámított értékeket, hogy minél pontosabb eredményeket vehessünk figyelembe az összehasonlítás során.

Az összehasonlítást ott kezdtem, hogy a szabványos EOVS vetület segítségével kiszámított koordinátákat, és a Hotine-féle ferdetengelyű Mercator-vetület EOVSzerinti vetületi egyenleteivel számolt közeliített EOVS koordinátákat egy-egy .txt fájlba kiírtam. Ezután már csak annyi volt a feladat, hogy a kapott koordinátákat összehasonlítsam. A .txt fájl első sorába írtam az EOVS jelöléseinek megfelelően az Y koordinátának megfelelő értékeket, a második sorba pedig az X koordinátának megfelelőket. Az összehasonlítást az egyszerűség kedvéért Microsoft Office Excel 2007-tel készítettem el. A két adatbázist így behívtam Excelbe, és az Y és X koordinátáinak a különbségét vettem, így megkaptam a különböző vetületi egyenletekkel kiszámolt koordináták eltérését. Ezután már csak a maximum eltérést kellett megkeresni egy egyszerű függvény segítségével. Az Y koordináták eltérésének maximumára 0,057 mm, míg az X koordináták maximum eltérésére 1,613 mm jött ki. Molnár és Timár azt írja dolgozatában, hogy a „Hotine-féle ferdetengelyű Mercator-vetület koordinátái Magyarország területén max. 0,17 mm-rel (!) térnek el a szabványos EOVS vetület segítségével kapott koordinátáktól”.

6.5. A közelítés értékelése

Láthatjuk tehát, hogy a saját számításom nem egyezik meg Molnár és Timár eredményével, azonban megközelítőleg azonos eredményre jutottam számításaim során. Az eltérés abból adódhat, mint ahogy már említettem korábban, hogy a számításaim során alkalmazott paraméterek, vetületi egyenletek nem pontosan fedik Molnár és Timár munkáját, illetve a leírt korrekcióknál is eltérések vannak. A kapott eredmények különbsége azonban elenyésző, ezért tehát mondhatjuk azt, hogy alátámasztottam Molnár Gábor és Timár Gábor állítását, miszerint az EOVS koordinátákat nagy pontossággal lehet közelíteni Hotine-féle ferdetengelyű Mercator-vetülettel. A vetület tehát alkalmas arra, hogy az ezt ismerő térinformatikai szoftverekben az EOVS-t helyettesítse, továbbá geodéziai alkalmazásokra is lehetőséget nyújt ez a vetület a pontossága miatt.

7. Összefoglalás

Úgy érzem, hogy a szakdolgozatom címének, vagyis a Ferdetengelyű szögtartó hengervetületek a térképészetben, megfelelően próbáltam a lehető legátfogóbban bemutatni ezen vetületeket. A vetületi rendszereket tekintve mind magyar, mind pedig külföldi példákkal támasztottam alá a ferdetengelyű szögtartó hengervetületek létjogosultságát, és alkalmazásainak sokféleségét. A magyar földmérésben és térképészetben kiváltképpen nagy jelentőséggel bír e vetület, mivel hazánk az EOY által ilyen vetületi rendszert alkalmaz mindmáig. A szakdolgozatban alátámasztást nyert Molnár és Timár „Az EOY-koordináták nagy pontosságú közelítése Hotine-féle ferdetengelyű Mercator-vetülettel” című dolgozata is, amelyet saját méréseimmel támasztottam alá. Így tehát azokban a térinformatikai szoftverekben, amelyekben nincs beépített EOY, helyettesíthetjük a vetületet Hotine-féle ferdetengelyű Mercator-vetülettel.

8. Hivatkozások

8.1. Irodalomjegyzék

Bolliger, J.: Die Projektionen der schweizerischen Plan- und Kartenwerke; Druckerei Winterthur AG, Winterthur, 1967.

Györffy János: Jegyzetek

<http://mercator.elte.hu/~gyorffy/jegyzete/jegyzete.html>

Juhász Péter: Ferdetengelyű szögtartó hengervetületek hossztorzulásának vizsgálata; Geodézia és Kartográfia, Budapest, 2007/10.

<http://www.fomi.hu/honlap/magyar/szaklap/2007/10/6.pdf>

Mezőgazdasági és Élelmezésügyi Minisztérium, Országos Földügyi és Térképészeti Hivatal: Vetületi Szabályzat az Egységes Országos Vetületi rendszer alkalmazására; Budapest, 1975.

Molnár Gábor – Timár Gábor: Az EOv-koordináták nagy pontosságú közelítése Hotine-féle ferdetengelyű Mercator-vetülettel; Geodézia és Kartográfia, Budapest, 2002/03.

<http://www.fomi.hu/honlap/magyar/szaklap/2002/03/mar3.pdf>

Snyder, John. P.: Calculating map projections for the ellipsoid; The American Cartographer, Vol. 6, No. 1, pp. 67-76, 1979/04.

Snyder, John. P.: Map Projections – A Working Manual; U. S. Geological Survey Professional Paper 1395, United States Government Printing Office, Washington, 1987.

Stegen Lajos: Vetülettan; Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

Varga József: A vetületnélküli rendszerektől az UTM-ig

http://www.agt.bme.hu/staff_h/varga/Osszes/Dok3uj.htm

Varga József: Vetülettan

http://www.agt.bme.hu/staff_h/varga/vetulet.html

8.2. Ábrajegyzék

1. ábra. – A Föld alakját közelítő felületek

Forrás: - <http://forums.ratedesi.com/showthread.php?p=9442420>

2. ábra. – Az érintő, és a metsző hengervetület

Forrás: http://standards.sedris.org/18026/text/ISOIEC_18026E_ABSTRACT_CS.HTM

3. ábra. – A normális elhelyezésű hengervetület

Forrás: [http://msdn.microsoft.com/en-us/library/cc749633\(v=sql.100\).aspx](http://msdn.microsoft.com/en-us/library/cc749633(v=sql.100).aspx)

4. ábra. – A transzverzális elhelyezésű hengervetület

Forrás: [http://msdn.microsoft.com/en-us/library/cc749633\(v=sql.100\).aspx](http://msdn.microsoft.com/en-us/library/cc749633(v=sql.100).aspx)

5. ábra. – A ferdetengelyű hengervetület

Forrás: [http://msdn.microsoft.com/en-us/library/cc749633\(v=sql.100\).aspx](http://msdn.microsoft.com/en-us/library/cc749633(v=sql.100).aspx)

6. ábra. – A berni vetületi középpont egy svájci szerkesztésű világtérképen

Forrás: **Bolliger, J.:** Die Projektionen der schweizerischen Plan- und Kartenwerke; Druckerei Winterthur AG, Winterthur, 1967.

7. ábra. – A svájci vetület területtorzulása egy svájci szerkesztésű térképen

Forrás: **Bolliger, J.:** Die Projektionen der schweizerischen Plan- und Kartenwerke; Druckerei Winterthur AG, Winterthur, 1967.

8. ábra. – A svájci ferdetengelyű szögtartó hengervetület

Forrás: **Bolliger, J.:** Die Projektionen der schweizerischen Plan- und Kartenwerke; Druckerei Winterthur AG, Winterthur, 1967.

9. ábra. – A három hengervetület (Varga József: Vetülettan)

Forrás: http://www.agt.bme.hu/staff_h/varga/vetulet.html

10. ábra. – Az EO, vagyis az Egységes Országos Vetület (Varga József: Vetülettan)

Forrás: http://www.agt.bme.hu/staff_h/varga/vetulet.html

11. ábra. – Az ellipszoidhoz simuló gömb oldalmetszete (Stegena Lajos: Vetülettan)

Forrás: **Stegena Lajos:** Vetülettan; Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

12. ábra. – A ferdetengelyű Mercator-vetület fokhálózati képe

Forrás: http://www.csiss.org/map-projections/Cylindrical/Oblique_Mercator.pdf

13. ábra. – A Hotine-féle ferdetengelyű Mercator-vetület fokhálózati képe

Forrás: <http://www.csiss.org/map-projections/Cylindrical/Hotine.pdf>

14. ábra. – A Hotine-féle ferdetengelyű Mercator-vetület koordináta-rendszere

Forrás: **Snyder, John. P.:** Map Projections – A Working Manual; U. S. Geological Survey Professional Paper 1395, United States Government Printing Office, Washington, 1987.

15. ábra. – A SOM, avagy az űrbéli ferdetengelyű Mercator-vetület (Stegena Lajos: Vetülettan)

Forrás: **Stegena Lajos:** Vetülettan; Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

8.3. Programjegyzék, és egyéb mellékletek

Ezen fejezet programjegyzék részében az általam készített programokat sorolom fel, és egy rövid leírást adok hozzájuk abból a célból, hogy a későbbi alkalmazás során

egyszerű legyen ezeket a programokat a célnak megfelelően felhasználni. A programok futtatásához Borland Turbo Pascal for Windows 1.5 javasolt. A programok elindításához pedig az eszközsoron lévő „Run” fülön belül a „Run” opciót kell választani, vagy pedig egy Ctrl+F9 billentyűkombinációval is elérhető a futtatás.

eov_xy.pas – Az EOV síkkoordinátákból először gömbi földrajzi, majd ellipszoidi földrajzi koordinátákat számol a program. Meg kell jegyezni, hogy nem a greenwichi, hanem a gellérthegyi meridiántól vannak számítva a földrajzi hosszúságok.

eov_nfnl.pas – Az EOV ellipszoidi földrajzi koordinátákból először gömbi földrajzi koordinátákat, majd EOV síkkoordinátákat számol a program. Az ellipszoidi földrajzi hosszúságot a gellérthegyi meridiánra vonatkoztatva kell megadnunk.

eov_hotb.pas – A Hotine-féle ferdetengelyű Mercator-vetület vetületi egyenleteit tartalmazza a program, melyet az EOV koordináták közelítésének megfelelően átírtam. Az ellipszoidi földrajzi koordinátákból EOV síkkoordinátákat számol a program a gellérthegyi meridiánra vonatkoztatva. A koordináta-rendszer tengelyei a Hotine-féle rendszernek megfelelően fel vannak cserélve.

ros_geo.pas – A Rosenmund-féle svájci vetületi rendszer vetületi egyenletei, mely a berni vetületi középponttól, méterben megadott síkkoordinátákból számol szögmásodpercben megadott értékekké, majd ellipszoidi földrajzi koordinátákat számol a greenwichi meridiánra vonatkoztatva. A programba beírva szerepelnek a mintapéldák az egyszerűség kedvéért, és az egyenleteknél az első tag (szorzótényező) helyett választhatjuk a kiegészítő tagot is. Ezeket egy egyszerű átzárójelezéssel megtehetjük, persze kapcsos zárójelet használva. Ha kézi bevitelt szeretnénk, zárójelezéssel az is megoldható, mivel beleírtam a kézi bevitelnek megfelelő forráskódokat is.

ros_ebe.pas – A Rosenmund-féle svájci rendszer segítségével, a berni vetületi középponttól mért, szögmásodpercben kifejezett értékekből először méterben kifejezett síkkoordinátákat számol a program, majd ezeket ellipszoidi földrajzi koordinátákká számolja át fokban kifejezve. Ebben a programban is szerepelnek a mintapéldák, és az előző programnál leírtak szerint itt is átzárójelezhető más értékekre, és kézi értékadásra a program.

ros_hotb.pas – A Hotine-féle ferdetengelyű Mercator-vetület svájci rendszerre való átírása, hogy svájci koordináták kiszámolására alkalmas legyen. A program ellipszoidi

földrajzi koordinátákból síkkoordinátákat számol. A koordináta-rendszer tengelyei itt is fel vannak cserélve, és a programban lévő y koordináta értéke nem negatív, hanem pozitív a rendszer eltérése miatt. A programban az egyszerűség kedvéért szerepel mindkét mintapélda, amelyeket a kapcsos zárójelek segítségével kiválaszthatunk. Kézi bevitelre is lehetőség van!

ros_eov.pas – Az EOV szabványos vetületi egyenleteivel kiszámolt svájci síkkoordináták. Paraméterezése persze megfelelő a svájci rendszernek, és az eltolások sem szerepelnek benne, amik az EOV-ra jellemzők. A programban szintén szerepelnek a mintapéldák!

A fejezet egyéb mellékletek részében pedig Magyarország ritkított határpontjainak (EOV koordinátáinak) adatbázisából kiszámolt koordináták .txt állományú adatbázisainak címét írom le. A címek mellé egy rövid magyarázatot is írok a könnyebb „tájékozódás” kedvéért. Illetve egy összehasonlító excel táblázatot is mellékelek az EOV és a Hotine-féle ferdetengelyű Mercator-vetület segítségével kiszámolt pontokról.

hat_eov1.txt – A kapott határpontok EOV síkkoordinátáinak méteres pontosságú adatbázisa. Első oszlopban az y , majd a másodikban az x koordináták találhatók.

hat_nfnl.pas – A kapott adatbázis EOV síkkoordinátáiból kiszámolt ellipszoidi földrajzi koordináták fokban megadva. Első oszlopban a földrajzi szélesség, míg a másodikban a földrajzi hosszúság szerepel a gellérthegyi kezdőmeridiántól számolva.

hat2e_.txt - Az EOV-val kiszámolt síkkoordináták a korábban kiszámolt ellipszoidi koordinátákból.

h2eovb_.txt – A Hotine-féle ferdetengelyű szögtartó hengervetülettel kiszámolt, közelített EOV síkkoordináták, amelyeket a kiszámolt ellipszoidi koordinátákból számoltam.

koo_különbség.xlsx – Az EOV-val, és a Hotine-féle ferdetengelyű Mercator-vetülettel kiszámolt EOV koordináták összehasonlítása, a különbségek maximumának meghatározása. Az első két oszlopban az EOV-val, míg a második kettőben a HOM-vetülettel kiszámolt értékek találhatók.

9. Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Dr. Györffy Jánosnak a szakdolgozatom elkészítéséhez nyújtott segítségét. Köszönöm neki, hogy mindig szakított rám időt konzultációk formájában, és hogy ezen alkalmakkor mindig hasznos tanácsokkal látott el. Köszönöm még Elek Istvánnak azon térinformatikai szoftverek felsorolását, amelyekre szükségem volt szakdolgozatom elkészítéséhez. Köszönetet kell mondanom testvéremnek, Fülöp Szabolcsnak, aki az adatok feldolgozásában segédkezett, és hogy mindig jó példával szolgált előttem saját szakdolgozata, és diplomamunkája elkészítése során. Köszönöm barátnőmnek, Németh Henriettának a szakirodalom beszerzésével, és a külföldi szakirodalom lefordításával kapcsolatos közvetett segítségét, és lelki támogatását.

Végül, de nem utolsó sorban pedig köszönetet mondok szüleimnek, akik támogatása nélkül nagyon nehéz lett volna megbirkózni az adódó nehézségekkel.

Nyilatkozat

Alulírott, Fülöp Dávid (ETR azonosító: FUDRAAT.ELTE) nyilatkozom, hogy jelen szakdolgozatom teljes egészében saját, önálló szellemi termékem. A szakdolgozatot sem részben, sem egészében semmilyen más felsőfokú oktatási vagy egyéb intézménybe nem nyújtottam be. A szakdolgozatomban felhasznált, szerzői joggal védett anyagokra vonatkozó engedély a mellékletben megtalálható.

A témavezető által benyújtásra elfogadott szakdolgozat PDF formátumban való elektronikus publikálásához a tanszéki honlapon

HOZZÁJÁRULOK

NEM JÁRULOK HOZZÁ

Budapest, 2012. május 15.

.....

a hallgató aláírása